This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

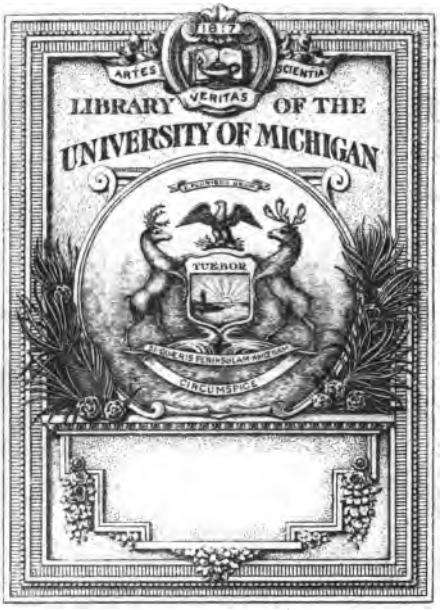
+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

Presented by Buff & Berger
9 Province Court, Boston,
Mass.

Fall of 1897.



THE GIFT OF
C. B. Davis

TA
540
.E1i
v.1
text

TRATADO

DE

TOPOGRAFIA

POR EL INGENIERO

SALVADOR ECHAGARAY

Ex-alumno
del Colegio Militar y de la Escuela Nacional
de Ingenieros de México.

TOMO PRIMERO.

INSTRUMENTOS.

Prima da misurare bisogna vedere.
Plana.

MEXICO

OFICINA TIP. DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO
Calle de San Andrés núm. 15.

1897

AL SEÑOR

GENERAL PORFIRIO DIAZ,

Como homenaje de respeto

Y AL

SR. LICENCIADO PABLO MACEDO,

Como tributo de cariño y gratitud

Dedico este libro.

General Library
C. B. Davis
8-25-42
2V.

INTRODUCCION.

En 1824 el ilustre Ingeniero italiano Ignacio Porro estableció las bases de la moderna Topografía que denominó *Celerimensura*, eliminando de la antigua todos aquellos métodos é instrumentos, cuya aplicación no podía dar resultados muy precisos ni la manera de comprobarlos y compensarlos. Un método único y rigurosamente geométrico debía aplicarse á todas las operaciones topográficas, método que, sintetizándolo, se reducía á determinar las coordenadas de cada punto por fijarse referidas á un sistema de tres ejes ortogonales, creando á tal fin un nuevo sistema de coordenadas topográficas. Si el método propuesto por Porro era rigurosamente geométrico y por lo tanto teóricamente inatacable, faltaba probar que era susceptible de una aplicación útil, fácil y práctica; la prueba se hizo, sus resultados fueron espléndidos.

En 1834 el Gobierno Sardo para fines militares emprendió el levantamiento eidipsométrico —de curvas horizontales equidistantes— del Ducado de Génova. Se quería un trabajo muy rápido y se concedió una to-

lerancia de 5 por 1,000. Por circunstancias especiales no podía contarse con oficiales técnicos y se encargó de ejecutar la obra á Porro con ayuda de 12 soldados zapadores, cuyos conocimientos se reducían al manejo de las cadenas, á servir de portamiras, usar la escuadra ordinaria, etc. Había en ese grupo un herrero, un carpintero y algunos albañiles. Porro les dió diez y nueve días lecciones de cálculos con tablas, y otros tantos de práctica en el campo. La operación entera de levantamiento sólo requirió treinta meses. Su resultado fué tal que en una comunicación ministerial de 1842 fué calificada como *incomparable monumento del arte;* consta de 93 hojas dibujadas eidipsométricamente y lo acompaña el registro de cuatrocientas cincuenta mil coordenadas referidas al faro y al nivel del mar. Cuatro mil líneas poligonales comprobadas y compensadas han dado la incontestable demostración de la exactitud obtenida en este trabajo y ha resultado que la *incertidumbre restante* no pasó en ningún punto de 2 por 1,000, siendo por otra parte perfecta la coincidencia con los puntos trigonométricos determinados por oficiales de ingenieros y por el mismo Porro. (1)

El nuevo sistema, sin embargo, no prosperó en Italia, y en 1852 vemos á Porro dirigiendo al Ministerio de Obras Públicas de Francia una memoria sobre sus instrumentos y métodos. Nombrada una comisión para examinar el valor de ellos dió un informe cuyas conclusiones fueron estas:

«De todas las operaciones que los ingenieros se ven

(1) Porro.—Manuale pratico di Geodesia moderna.—Milano.

llamados á ejecutar sobre el terreno, la medida con cinta ó cadena (Chaînage) es sin contradicción la más fastidiosa, la más penosa y la que trae consigo más probabilidades de error. Construyendo un anteojo micrométrico exento de todos los defectos que habían impedido desarrollarse el procedimiento de la estadia, Porro ha hecho un señalado servicio á los operadores. La posibilidad de determinar de una misma estación, sin medida con cadena, sin cuidado por obstáculos que la vista puede franquear, las distancias, las cotas de nivelación y las posiciones respectivas de una serie de puntos observados, es de naturaleza á introducir una verdadera revolución en el arte de las operaciones sobre el terreno. Ahora bien, esta posibilidad para nosotros no es dudosa; sin efectuar un levantamiento completo, hemos podido comprobar que la lectura sobre la estadia se hace con una facilidad extraordinaria y con una maravillosa precisión en los límites de potencia de cada anteojo y que da resultados comprendidos en los límites de aproximación indicados por el inventor. Si tratamos de apreciar el mérito de las diversas partes del teodolito olométrico, sólo encontramos para él un elogio completo y sin restricciones. La idea fundamental de volver analático el anteojo es á la vez ingeniosa y sencilla; el orientador magnético presenta un desarrollo tan feliz como útil de la concepción que Gauss había realizado con un objeto exclusivamente científico. El aumento muy fuerte del anteojo da á las lecturas sobre la estadia una claridad y certidumbre á las que nada comparable se encuentra en los instrumentos ordinarios con sus aumentos de doce

á quince veces. El éxito de los procedimientos de Porro es debido en gran parte á este fuerte aumento y á una multitud de detalles, resultado de una larga práctica, y tan bien ejecutados como bien concebidos. El mérito de sus aparatos no se ve atenuado á nuestros ojos porque su éxito se deba á medios tan sencillos; porque además de las ideas fundamentales que pertenecen en propiedad á su autor, el conjunto constituye verdaderamente algo nuevo, como él mismo lo dice. Pero lo que tiene más importancia á nuestros ojos, es la multiplicidad de las aplicaciones posibles de los anteojos analáticos y de los procedimientos de la estadia. Para no indicar sino solamente una: la medida de las distancias, la nivelación, la colocación de postes kilométricos y el levantamiento itinerario de todos los caminos del territorio, podrán actualmente efectuarse con una prontitud, una seguridad y una economía que los procedimientos antiguos no pueden alcanzar. Por otra parte, la red de nuestras vías de comunicación está léjos de ser completa y los estudios sobre el terreno se abreviarán y facilitarán singularmente por el empleo de nuevos métodos y de nuevos aparatos.»

El informe continúa más adelante en estos términos: «Creemos, pues, Señor Ministro, que la administración debe conceder una plena y entera aprobación á los instrumentos y métodos de M. Porro. Pero su papel, según nuestra opinión, no debe limitarse á una aprobación pura y simple. La introducción de los procedimientos de Porro en la práctica diaria nos parece un progreso muy notable, muy útil á la buena y pronta ejecución de los proyectos, para que no propongamos

hacer algo más. La enseñanza en las Escuelas de Puentes y Calzadas y de Minas deberá en adelante extenderse á los nuevos procedimientos y los alumnos deberán ejercitarse en la práctica de los nuevos instrumentos. Además, es útil que entre los ingenieros que tienen actualmente que hacer estudios sobre el terreno, haya algunos encargados por la administración de someter á una prueba diaria y largo tiempo prolongada los intrumentos y métodos de Porro, etc.» Pero aun en Francia habrían estos quedado en el olvido á no ser porque el Ingeniero Moinot en 1865, empleando el diastimómetro de aquel autor, construyó un taquímetro, provisto de una aguja magnética, de un círculo graduado vertical y de otro horizontal y dió á la vez métodos que deben de considerarse como de primer orden para conducir los trabajos de levantamiento, cálculo y dibujo.[1]

En Austria el método Moinot fué introducido hacia 1870 por el Ingeniero Heuser y empleado con gran éxito en extensos levantamientos de regiones quebradas. La taquimetría desde entonces ha recibido especial atención en ese país, particularmente en la Dirección General de los Ferrocarriles. Ingenieros, profesores y mecánicos compiten en la construcción de nuevos instrumentos y en el perfeccionamiento y dilucidación de los métodos de levantamiento, para dar al operador los medios para obtener sus medidas verticales y horizontales en el menor tiempo y con la mayor exac-

(1) Die Wagner Fennel'schen Tachymeter. I. S. Licka. Cassel, 1886. Traducido al inglés por W. C. Hodgkins C. E.–U. S. Coast and Geodetic Survey. Report 1891.

titud. En la Alemania del Norte el taquímetro del Ingeniero Karl Wagner, construído por Otto Fennel, de Cassel, es el más generalmente empleado y los nuevos métodos tienen extensa aplicación. Su uso se ha extendido á Turquía, Bulgaria, etc. Entre nosotros son bastante conocidos los instrumentos italianos modernos que la casa Calpini sucesores vende hace tiempo; pero los métodos correspondientes puede decirse son desconocidos ó al menos no se aplican y lo que de ellos se enseña en nuestras Escuelas, tiene el carácter de un pequeño estudio adicional al curso clásico de topografía, considerándose como un capítulo de ésta ó como un sistema de levantamiento quizá útil en casos especiales.

Este es un error del cual si algunos no participan, sí puede afirmarse que es profesado por muchos Ingenieros.

Más adelante examinaremos las varias causas que lo han producido, y dilatado la adopción general de los nuevos procedimientos.

El nombre dado á sus métodos por Porro (Celerimensura) y el usado en Francia (Tachéométrie), hacen creer que su cualidad saliente es la rapidez en la ejecución de las medidas. Bastaría esta ventaja sobre los procedimientos antiguos para hacer á los nuevos dignos de aplicación, y de elogio al inventor; pero no es ciertamente la de velocidad la característica de las ideas puestas en práctica por Porro y sus brillantes sucesores. No; hay en los modernos métodos un fun-

damento racional en vez de la base empírica de muchos de los antiguos, y hoy que en todos los ramos de los conocimientos humanos se exige la verdad en vez de la ilusión y el conocimiento de la magnitud de nuestros errores, en vez de la ignorancia voluntaria de que los cometemos, la Topografía no se detiene y los esfuerzos de los citados ingenieros, los de Jordan, Goulier, Lörber, Erede, Soldati, Cavani, Salmoiraghi, Brönimann, Tachini, Daddi, etc., han hecho los métodos de levantamiento tan completos, racionales y expeditivos cuanto fueron en el pasado rudimentales, empíricos y dilatados.

Hemos dicho: completos, racionales y expeditivos y procuraremos demostrarlo.

En cualquiera opreación topográfica *se trata de determinar una serie de puntos convenientemente elegidos sobre una determinada superficie de terreno, con el fin de dar una expresión clara y exacta del terreno mismo.*

Un punto queda determinado en el espacio cuando se conocen sus coordenadas referidas, por ejemplo, á un sistema preestablecido de tres ejes ortogonales y *el conocimiento final de estas coordenadas es el problema que el topógrafo resuelve* por los *métodos* que cree mejores, aplicándolos á los datos que sus *instrumentos* proporcionan. No siendo posible trazar los ejes materialmente sobre el terreno, y por lo tanto medir las tres coordenadas x, y, z de cada punto, se acude á medios indirectos para conocerlas. La idea genial de Porro consistió en medir las tres coordenadas polares de cada punto y deducir de ellas las tres ortogonales. Necesitó por consiguiente proveer los medios

necesarios para medir ángulos y distancias; esto es, construir un goniómetro y un distanciómetro. A los teodolitos comunes sustituyó uno especial, el *clepsciclo* ó simplemente *cleps* que tiene los dos círculos (uno vertical y otro horizontal) necesarios para las dos coordenadas angulares y el aparato óptico que mide indirectamente las distancias, pues la medida directa por larga siempre y á veces imposible tenía que eliminarse.

El tamaño de los círculos, su división en grados y fracciones de grados, la potencia de los microscopios para la lectura de la graduación y las disposiciones para orientar y nivelar el instrumento, han sido otros tantos puntos de difícil estudio para llegar á poner en estrecha relación la potencia de cada uno de esos órganos con la de los demás y con el conjunto del instrumento; para no dar á una parte ilusoria precisión que se pierda por la menor de otra conexa ó por el límite á que nos condena la imperfección de nuestra vista; para hacer, en fin, que el Ingeniero sepa lo que debe esperar del instrumento que usa y valorizar sus resultados con un criterio positivo.

La especial disposición del distanciómetro fué otra brillante idea de Porro. Al ángulo diastimométrico variable de la antigua estadia sustituyó, por la adición de una lente en el telescopio, un ángulo constante, y aumentando la potencia del anteojo hizo posible la medición indirecta de las distancias con la exactitud requerida en el arte topográfico. Así, aplicando las formulas de la Geometría las coordenadas ortogonales de los puntos podrán deducirse de las tres polares dadas

exacta y fácilmente por el instrumento y quedarán *expresadas numéricamente.* Este es uno de los caracteres esenciales del nuevo método.

Sobre este punto dice Porro: "La Celerimensura ha sido la solución del problema propuesto para satisfacer á las insistentes y numerosas necesidades creadas por el gran incremento de los trabajos públicos y las urgencias siempre crecientes así administrativas como de jurisprudencia, de alta estadística, de arte de gobierno, entre las cuales principalmente son de notarse las de no admitir ya más los trabajos solamente *gráficos* sino exigir siempre todas las dimensiones originales *numéricamente* escritas; todas las definiciones de los contornos de las propiedades, todas las designaciones que tengan ó puedan tener por fin radicar un derecho, exigir, decimos, que sean por su naturaleza ó forma manualmente inscribibles en las actas y contratos, y la de querer que todos los resultados se comprueben numéricamente como verdaderos y esto desde las mayores dimensiones hasta los menores detalles, y la de pretender que todo sea siempre comprobable en cada una de sus partes, hasta en el detalle más pequeño, con medios matemáticos independientes del juicio de los hombres."

La antigua Topografía no permite esta expresión numérica y da, al contrario, gran importancia al graficismo en los detalles, pues en cuanto á los medios para ligar por una red de triángulos los principales puntos del terreno midiendo un lado y los ángulos de la red, calculando después por las fórmulas de la Trigonometría las coordenadas de los vértices y compen-

sando los errores inevitables en toda operación material, son los mismos en la antigua como en la moderna Topografía y aquella, como ésta, da los medios para comprobar los errores de una triangulación y compensarlos; pero en el llenamiento, digamos así, de los detalles interiores de los triángulos, la nueva escuela proporciona los medios para extender el método de la *compensación* á todas las operaciones del levantamiento, dando así *peso igual* á la más pequeña como á la mayor dimensión medida y expresando todas, repetimos, numéricamente.

Porro en su obra antes citada dice á este respecto: "El método de las *compensaciones* de Gauss, adoptado primeramente por los geómetras alemanes sólo para las operaciones trigonométricas de primer orden, pero que va extendiéndose, sobre todo en Alemania, á las operaciones geodésicas de todos las órdenes, es por nosotros considerado como parte integrante y fundamental de la Celerimensura y extendido hasta los menores detalles; todo en Celerimensura debe ser comprobado de modo que ningún error propiamente dicho pueda de alguna manera quedar en el resultado final; las menores incertidumbres restantes después, de naturaleza accidental, aun cuando se hallen en el límite de la tolerancia concedida, no son toleradas sino después de atenuadas y reducidas á su mínimo valor por medio de las compensaciones."

Es decir, que en la moderna ciencia topográfica estando todo comprobado, las probabilidades de error se atenúan extremadamente y podría decirse que no se admiten errores. A lo sumo se toleran pequeñas dife-

rencias en los resultados finales [*tolerancias*]; pero aun éstas reducidas á tales extremos que no tengan prácticamente valor alguno.

Si la perfección actualmente mayor de los medios mecánicos y ópticos nos permite aumentar la precisión de las medidas; si todos y cada uno de los puntos importantes se pueden determinar de posición en el espacio por el valor de sus coordenadas, resolviendo por tanto todos los problemas que puedan ocurrir; si los resultados obtenidos por la observación son tales que de ellos pueda deducirse el error que los afecta y si se combinan de tal suerte que se compensan sus errores de la manera más racional, ya que nunca es dado eliminarlos por la inevitable diferencia entre el valor real y el observado de una magnitud cualquiera, y si todo esto se efectúa en menor tiempo del empleado con los antiguos medios, los procedimientos que alcanzan semejantes resultados, serán completos, racionales y expeditivos. Ahora bien, la teoría demuestra y la práctica confirma la verdad de este aserto. Nuestra obra entera será la prueba de lo primero y es posible convencerse fácilmente de lo segundo; pero podemos anticipar las siguientes ventajas propias de la Celerimensura.

1ª Se opera en el campo, al menos para muchas clases de trabajos, con una rapidez desconocida en otro método cualquiera; de aquí el nombre de Celerimensura ó Taquimetría. Se tiene una economía en los trabajos de campo que son los más costosos.

2ª Midiendo las distancias por medios indirectos, no hay, por decirlo así, obstáculos que impidan el levan-

tamiento; se opera en los terrenos más accidentados, cubiertos de plantas, cortados por cursos de agua, se recorren las faldas más escarpadas de las montañas, sin necesidad de ocurrir á largos y fastidiosos rodeos, etc..

3ª Cada punto del terreno se levanta simultáneamente tanto en el sentido *planimétrico* como en el *altimétrico*, ventaja inmensa que bastaría para preferir este método de levantamiento á otro cualquiera, especialmente en lugares accidentados tan comunes en nuestro país.

4ª Se presta á cualquiera especie de levantamiento topográfico, desde el más sencillo hasta el más elevado en el campo de la topografía propiamente dicha, sin perder en ningún caso sus ventajas.

5ª Se tiene una *expresión* del levantamiento exclusivamente *numérica*, ó sea de base numérica, que se inscribe en el registro para determinar con ella las coordenadas ortogonales de cada punto y obtener si se quiere la expresión gráfica con la máxima exactitud posible.

6ª La determinación de los puntos por sus coordenadas no requiere la aplicación de fórmulas complicadas, sino tan sólo la de las tres sencillas de transformación de coordenadas polares en rectangulares y alguna vez la del teorema de Pothenot. El trabajo de cálculos es corto.

7ª Ofrece, en fin, como ya se dijo, los medios de *comprobar* y *compensar* los resultados, lo cual constituye *otra* de las *cualidades características del nuevo sistema.*

Hemos señalado varios caracteres de la Celerimensura: la rapidez de la medición sobre el terreno, expresión numérica de las coordenadas de los puntos y posibilidad de comprobar y compensar los resultados. ¿Cuál ó cuáles de estos caracteres definen la Celerimensura? A mi juicio los tres simultáneamente, y yo diría: *la Celerimensura es aquel modo de proceder* en los levantamientos topográficos que de una manera expeditiva da *las posiciones de los puntos por sus coordenadas numéricas, presentando en los resultados mismos la posibilidad de determinar los límites entre los cuales corresponden con la verdad.* Porro en una época la consideró como un método más rápido y más exacto para la formación de planos acotados representando una zona de terreno.

De 1860 en adelante la definió como un método esencial y exclusivamente descriptivo, ya que cada punto debía sólo considerarse determinado cuando fueran conocidas sus tres coordenadas respecto á un sistema de ejes rectangulares. En esta última época cayó en la exageración (preocupado por la idea de subordinar la Topografía al servicio del Catastro), de no hablar del plano gráfico sino como de un medio cómodo para hablar á *los ojos* y el trabajo estaba concluído al tener un registro de coordenadas sobre el cual podían hacerse los estudios necesarios, cálculo de una superficie, trazo de una vía, etc.

Yo considero que la Celerimensura responde á uno y otro de los citados fines, y juzgo que la definición que adopté abraza sus cualidades con más generalidad aún

que la dada por Salmoiraghi en su excelente obra (1), definición la más precisa de las varias que conozco, y la cual considera la posibilidad de asignar los límites del error, como el fundamento y razón de ser de la supremacía de los métodos. Creo que esta es *la principal* cualidad y recomendación de los procedimientos modernos, *y una de sus características*, pero no la única, puesto que la de suministrar los datos numéricamente y la de darlos con rapidez también, son propias de estos procedimientos y no lo son de los métodos antiguos, por lo cual deben todas formar parte de la definición de la Celerimensura.

Ocurre preguntar después de todo lo dicho, ¿por qué reformas tan racionales é importantes en un arte universalmente practicado como lo es el topográfico no se han adoptado inmediatamente?

La inercia humana para adaptarse á cualquiera innovación, y el amor de los Profesores al viejo curso, su patrimonio científico, pienso que son las causas más generales del retardo.

En México pueden contarse además otras que nos son propias. Los trabajos públicos son muy limitados; no tenemos en obra el Catastro, el levantamiento regular, ú otro trabajo semejante de algún Estado de la República; ni los de irrigación, vías de comunicación ó mejoramiento de ríos, etc. La topografía de los te-

(1) Istrumenti e metodi moderni de Geometria applicatta.—Milano, 1884.

rrenos nacionales se ha ejecutado hasta hace poco sin reglamentación, y la de las propiedades particulares es generalmente de escaso valor, seguramente por el poco precio de las tierras.

A las razones dichas pueden agregarse otras también generales, pero de distinta índole. La excentricidad del anteojo en los cleps, la división centesimal en vez de la antigua sexagesimal, la nomenclatura nueva, el uso de reglas calculadoras ó escalas, y el poco conocimiento de las lenguas y literaturas científicas italiana y alemana, han sido otros tantos factores que han contribuído á retardar la adopción de los nuevos métodos é instrumentos.

En Francia y los países germanos donde los trabajos públicos tienen suma importancia y la propiedad es valiosa, los métodos de Porro y Moinot son de todos conocidos; y en Italia, que después de su unidad política ha entrado en una vía de rápido progreso, la Topografía se ha hecho una ciencia de la mayor importancia por el notable desarrollo de la construcción de caminos, ferrocarriles y obras hidráulicas y más que nada por el gran levantamiento catrastral (sobre el cual se basa el impuesto sobre la propiedad rústica) que se halla en vía de ejecución. La enseñanza del *método numérico* en los institutos técnicos ha progresado de tal modo que «puede asegurarse que no hay «un Ingeniero recibido en los últimos años en las Uni«versidades del Reino que no esté bien al corriente de «las nuevas tendencias, y lo prueban incontestables «mente los continuos trabajos que puede decirse se si«guen día por día sobre los nuevos métodos.» (1)

(1) A. Taechini.—Topografía Moderna, 1891.—Introduzione.

Creo llegada la época para que se haga entre nosotros el estudio regular de la Nueva Topografía, porque nuestro clásico curso por Díaz Covarrubias, con todas sus excelencias, no es ya de nuestro tiempo y si vive artificialmente en un medio que no es el suyo; mejor que gastar nuestras fuerzas en conservar el pasado, podemos emplearlas en establecer lo nuevo; no por el simple afán de variar, sino por la sólida convicción de que empeñándonos en sustituir los métodos empíricos con los positivos, hacemos un servicio real á la ciencia y á los futuros Ingenieros. Servicio grande por la intención, pequeño por nuestros medios, sea dicho sin falsa modestia.

Si por esta deficiencia el presente libro no llena cumplidamente su objeto, podrá quizá estimular á alguien más apto á remediar el mal que aquí denuncio, y mi satisfacción será en todo caso la de haber sido el primero que emprende en México la publicación de un libro sobre el arte topográfico moderno. Apenas si ella me compensará del tiempo que he gastado, persuadido desde un principio de que bueno ó malo este libro, no me producirá fruto alguno, pero confiado en que la materia de que trato es bastante interesante para forzar la atención del lector, á pesar de los defectos en que necesariamente incurro.

Creo también llegado el tiempo de que el estudio de la Topografía moderna ocupe el puesto que merece en la enseñanza, porque ya nuestro estado social pide un desarrollo mayor de los trabajos públicos. Cada día se sentirá más la necesidad de formar cartas de los Estados para conocer verdaderamente sus vías de comu-

nicación y límites, la disposición altimétrica de sus zonas cultivables y la de sus cursos de agua, la situación de sus minerales, etc. El Catastro creemos que pronto tendrá que realizarse para uniformar el impuesto y hacerlo equitativo; las obras de saneamiento y provisión de agua de las ciudades no deben ya demorarse y si todos estos trabajos se ejecutan por los nuevos procedimientos, se ahorrarán sumas considerables y economizará un tiempo precioso, obteniendo resultados superiores á los proporcionados por los métodos antiguos.

El aumento de valor de los predios rústicos y la necesidad imperiosa de proveer de agua nuestras tierras altas, son uno de tantos factores que impulsarán entre los particulares la formación de trabajos topográficos exactos. En éstos es indiscutible la ventaja que tendrá el Ingeniero capaz de hacerlos económicamente.

Pudiera pensarse que es mejor traducir alguno de los varios tratados modernos de Topografía y no acometer la empresa de escribir uno más, en totalidad. Fué esta la primera idea que me ocurrió y leí con detenimiento las obras de Tacchini, Erede, Salmoiraghi, Ruotolo, Jordan y otras, que me parecieron propias para la enseñanza. Todas ellas son excelentes y sus autores hombres de gran experiencia y saber, pero han sido escritas para satisfacer condiciones diferentes de las nuestras y encerrando, como encierran, valiosísimos materiales, son deficientes en algunos puntos y demasiado extensas en otros con relación á lo que juzgo interesa conocer á nuestros Ingenieros.

Sería alargar demasiado esta ya prolongada In-

troducción, si estudiara en ella cada una de las obras que analicé, deseando encontrar una adaptable á nuestras especiales circunstancias, entre las cuales recordaremos: la grande extensión de las propiedades rústicas del país, que hace necesarios al topógrafo ciertos conocimientos de la Geodesia; lo montañoso del suelo; en muchas regiones la escasez de vías de comunicación y de toda clase de elementos; la frecuente necesidad de levantamientos subterráneos en las minas, etc. Muy particularmente ha sido mi guía en el primer volumen, la de uno de los más entusiastas continuadores de Porro, el distinguido Ingeniero y hábil fabricante de instrumentos Angelo Salmoiraghi. El orden de exposición de su "Geometria applicatta" es el que adopté, modificándolo en algunos puntos, por seguir otro que creo más racional.

Las obras de Tacchini, Gautier y la excelente de Jordan "Lehrbuch der Vermesungskunde," son las que más he utilizado en el segundo volumen para dar un desarrollo que me parece claro y metódico de la parte de métodos.

Creyendo que entre los instrumentos ingleses y americanos se encuentran muchas ventajas, aunque no tantas como en los italianos y alemanes, y considerando también que en México son muy generales, ya por la costumbre adquirida de emplearlos, ya por la facilidad de adquirir los americanos en pocos dias, doy frecuentes descripciones de sus partes y conjunto y de su modo de empleo, las que no se encuentran en los tratados italianos ó alemanes.

Igualmente las varias tablas que contiene este libro,

en las cuales entran elementos dependientes de la posición geográfica, como en la corrección barométrica por latitud, en el cálculo de ésta y del azimut por observaciones solares, etc., las doy para el caso particular de nuestro territorio.

En resumen, no pretendo haber hecho adelantar la nueva ciencia topográfica ni creo tener otro mérito que el de iniciar su estudio entre la generalidad de nuestros Ingenieros, persuadido de que hallarán en ello grandes ventajas. He buscado el dar una forma conveniente para nosotros á las enseñanzas de las varias obras que desde puntos de vista especiales tratan de la materia, eligiendo lo mejor de cada una, modificando sus reglas según nuestras especiales condiciones, y dando, por último, la facilidad de leer en el propio idioma.

He dividido esta obra en dos volúmenes; el primero destinado á exponer la teoría, construcción y uso de los *Instrumentos medidores*, y el segundo, los *Métodos de medición*. Este último, en el Apéndice, describe los medios gráficos de representación del terreno, da un estudio del método de los mínimos cuadrados, de la regla de cálculo, etc.

El primer volumen que ahora doy al público, se divide á su vez en cinco partes: la *primera* se ocupa del problema general de la medición y del particular de las medidas topográficas, de la determinación de la posición de los puntos y de la demarcación de puntos, líneas y planos; la *segunda parte* se refiere á la manera de establecer los planos coordenados de referencia de los puntos; la *tercera* trata de la medida directa é

indirecta de las líneas y de los ángulos; la *cuarta* describe los instrumentos topográficos completos, y la *quinta* los instrumentos accesorios empleados por el Ingeniero.

Creo lógico el método sintético de exposición que he adoptado y por consecuencia juzgo fácil hacerse cargo del conjunto.

He concedido mucho interés al estudio de los órganos ópticos é insistido siempre en dar clara idea del límite de exactitud que es dable obtener de cada una de las partes de un instrumento: el visador, los niveles, la graduación, etc. Me ha parecido que no son de desdeñarse observaciones sobre ciertos detalles materiales, al parecer insignificantes, pero de mucha significación en la práctica.

No quiero terminar sin hacer presente mi gratitud á las personas que benévolamente me han ayudado en este trabajo, entre ellas los Señores Ingenieros D. Manuel Fernández Leal, nuestro honorable Ministro de Fomento y mi buen amigo D. Agustín Aragón.

México, Octubre 23 de 1896.

TRATADO DE TOPOGRAFIA.

PARTE PRIMERA.

CAPÍTULO I.

De la medición.

1. *La Topografía* tiene por objeto determinar las posiciones relativas de una serie de puntos elegidos convenientemente sobre una superficie determinada de terreno, con el fin de dar una expresión clara y exacta del terreno mismo.

En consecuencia será preciso medir diversas magnitudes, como distancias, ángulos, etc.

"El arte de medir bien puede llamarse el lazo de unión entre la ciencia abstracta y sus aplicaciones, la introducción á las Matemáticas aplicadas; y limitándose al caso especial de medir extensiones terrestres, es la introducción al estudio de la forma, dimensiones y representación de la tierra."

"Cuando conozcamos los varios medios y artificios por los cuales es posible descubrir la relación entre una cantidad geométrica dada y otra de la misma especie tomada por unidad de medida, será fácil con la simple aplicación de las leyes de la Geometría pura, resolver todas las cuestiones que interesan en el vasto problema de la Geometría práctica, y princi-

palmente en los más sencillos y elementales que más particularmente interesan al ingeniero." (1)

En el acto de medir debemos considerar:

1º La magnitud real que nos interesa conocer: línea, superficie, volumen, etc.

2º La magnitud real de la misma especie: lineal, superficial, cúbica, etc., que adoptamos como unidad.

3º El resultado de la comparación entre la magnitud por medir y la unidad de medida, ó sea un número que expresará cuántas veces la unidad está contenida en la magnitud que se midió.

2. Las medidas pueden practicarse directa ó indirectamente.

La medición de la longitud de una línea por la aplicación material de la unidad á lo largo de su extensión, es un ejemplo bien conocido de medida directa. La resolución de un triángulo cuando se tienen los elementos necesarios para aplicar las fórmulas trigonométricas, nos da la longitud de dos lados sin que haya sido preciso el medirlos materialmente, siempre que hayamos medido el tercero y los ángulos necesarios para aplicar las fórmulas correspondientes. Este es un ejemplo de medida indirecta familiar al topógrafo, y podríamos citar muchos más, pero bástenos recordar la manera de conocer la diferencia de nivel entre dos puntos, por la diferencia de presión atmosférica en ellos, deducida de las alturas respectivas de la columna barométrica.

3. Ni por las medidas directas ni por las indirectas nos es dado llegar á conocer las exactas magnitudes; solamente podemos aproximarnos á la verdad hasta un límite, que depende de la aproximación de los métodos de cálculo, de la apreciación de los sentidos y de la natural imperfección de los instrumentos de medida.

El incesante progreso de las artes mecánicas ha ido diaria-

(1) Salmoiraghi. Geometria applicatta, pág. 6.

mente disminuyendo el último factor, la máquina de dividir, por ejemplo, ha alcanzado un grado de perfección elevadísimo; la fabricación de las lentes ha seguido un camino paralelo, y en la actualidad los instrumentos topográficos son modelos de precisión y buen trabajo.

La aplicación de métodos convenientes y la habilidad personal de cada observador, desarrollada por la práctica, disminuyen la influencia de los primeros factores y hacen menor la divergencia entre la magnitud real y la que obtenemos por la medición; pero no llegaremos jamás á salvar completamente el espacio enorme que separa lo abstracto de lo concreto.

4. Si al recoger nuestros datos no nos limitamos solamente á los indispensables, sino que adquirimos además otros que nos permitan, por la comprobación de nuestros resultados, conocer el límite de aproximación que puede obtenerse y la verdadera magnitud de los errores de observación, y si por otra parte adoptamos métodos adecuados para la compensación racional de los errores restantes, ya que no podemos eliminarlos en cada caso que se presentan, habremos hecho cuanto se puede y debe pretender de un método que aspire á llamarse racional y científico y no simplemente práctico.

Este principio de la compensación que ya formaba parte de la Geodesia va teniendo cada día mayores aplicaciones en el arte topográfico y él le comunica su nuevo y más científico carácter.

5. Se desprende de lo dicho que la topografía comprende dos estudios esencialmente distintos: el de *los instrumentos de medición* y el de *los métodos de medición y cálculo.*

Expondremos en este volumen primeramente, cuáles son los problemas por resolver, ó mejor dicho, cuáles las magnitudes por medir con los instrumentos, y conociendo el fin que deseamos alcanzar, examinaremos los medios empleados para lograrlo, estudiando sucesivamente las partes que constituyen los instrumentos medidores, describiendo su conjunto

que debe satisfacer á determinados fines, su modo de empleo, rectificaciones y cuidado material; pero para seguir un orden lógico y evitar repeticiones fastidiosas, describiremos de una sola vez las partes ú órganos comunes á varios instrumentos, como son: los anteojos, ejes verticales y horizontales, círculos divididos, etc., y detallaremos más tarde los caracteres que diferencian unos de otros, ya por su distinto objeto, ya por simples detalles de construcción.

CAPÍTULO II.

De los varios sistemas empleados para determinar la posición de un punto y del límite de las operaciones topográficas.

6. Sabemos por la Geometría que la posición de un punto queda determinada cuando se dan sus coordenadas. Pueden tenerse tantos sistemas de éstas, cuantos se quiera, pero los dos más usados son: el de Descartes y el de coordenadas polares.

En el primero, la posición del punto se conoce dadas que sean las *distancias* de él á *tres planos* que se cortan en un punto, que se llama *origen*. En general, estos tres planos se hacen perpendiculares unos á otros.

En el sistema de coordenadas polares la posición del punto se fija: 1º Por la *longitud del radio vector* ó sea la distancia del punto á otro fijo tomado por origen y que se llama *polo*. 2º Por la *medida del ángulo* que el radio vector forma con la normal á *un plano* de *posición invariable* que se hace pasar por el *polo*. 3º Por la *medida del ángulo* que la proyección ortogonal del radio vector sobre el plano fijo, forma con una *recta* también *fija* que pasa por el polo y está trazada en el plano.

En el primer sistema tenemos tres coordenadas *lineales* y en el segundo *una lineal* y dos *angulares*, y en ambos la determinación del punto será completa, siempre que expresemos,

para el de Descartes, en cuál de los ocho ángulos triedros que forman al cortarse los tres planos coordenados, se encuentra el punto; lo cual se consigue por medio del signo de cada una de las coordenadas, que se hace positivo ó negativo, según el sentido en que se cuentan éstas á partir del origen, y en el sistema polar expresando por el signo, el sentido en que se toma como positivo el radio vector y el modo de contar el incremento de los ángulos.

Como un ejemplo de constante empleo de las coordenadas de un punto para fijarlo, tomaremos el siguiente: La posición de un punto de la tierra se fija dando: 1º su *latitud* ó sea el ángulo que la normal al elipsoide terrestre en el lugar citado, forma con el plano del ecuador; 2º su *longitud*, ó sea el ángulo que forman entre sí el plano meridiano, tomado como origen y el plano meridiano del punto, y 3º la altura sobre el nivel del mar. Si se hace abstracción del relieve de los continentes y se considera la tierra como una esfera, la última coordenada ó sea el radio, se hace una constante. Para acabar de determinar la posición del punto, se expresa si está colocado en el hemisferio boreal ó en el austral y al Este ú Oeste del primer meridiano.

Son bien conocidas las fórmulas para pasar del sistema de coordenadas de Descartes al de Polares. (Fig. 1ª)

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$$
$$z = r \cos \varphi$$

7. Si encontramos el medio de medir directa ó indirectamente las coordenadas de los puntos del terreno cuya posición nos importa conocer, las fórmulas y proposiciones de la Geometría serán inmediatamente aplicables á la medida de la tierra; y en consecuencia, el problema para el Ingeniero consistirá en *determinar la posición de los puntos de la superficie terrestre, por la medida de sus coordenadas.* Pero como hemos

visto que estas son: lineales y angulares, preciso será que ejecutemos *medidas de líneas y medidas de ángulos.*

Las primeras son difíciles y á veces imposibles de ejecutar directamente, puesto que para ello sería preciso recorrer las líneas en toda su extensión; las segundas, por el contrario, pueden llevarse á cabo sin mover el instrumento de la estación ó vértice del ángulo.

En lo general, y con objeto de volver á determinarlos cada vez que sea necesario, se eligen en el sistema de coordenadas lineales los planos fijos, tomando uno de ellos horizontal y dos verticales, y señalando el origen en un punto que se toma en cada caso, de modo que resulten los cálculos numéricos de las coordenadas lo menos complicados que sea posible ó bien se toma el punto más importante del terreno.

8. Al adoptar un plano horizontal que pase por un punto del terreno, como plano fijo y proyectar sobre él ortogonalmente los demás puntos, se supone que en la extensión por medir el plano tangente á la superficie terrestre se confunde con la verdadera superficie que, como se sabe, es la de un elipsoide de revolución. En este supuesto fundamental de la Topografía, se admite que las verticales de los varios puntos que se determinan son parelelas y no convergentes como se verifica en realidad. El limite que se asigne á este supuesto, dependerá de la precisión que pueda alcanzarse con los instrumentos y métodos empleados en relación con la extensión por medir. Veamos el valor del ángulo de convergencia de las verticales:

Si llamamos **d** la distancia entre dos puntos de la superficie de la tierra, considerada esférica, y la contamos sobre un círculo máximo y tomamos por radio de la esfera

$$R = 6{,}366.740^{m}$$

ó sea el término medio entre los semi-ejes de la elipse genera-

triz, el ángulo x que forman las verticales de los puntos será, expresado en segundos:

$$x = 206.265 \frac{d}{R} = 0{,}0324\ d\ (1)$$

Al proyectar los extremos del arco **d** sobre un plano tangente al punto medio del arco, siguiendo las direcciones de los radios que pasan por dichos extremos, obtenemos una longitud mayor en la tangente que la medida sobre el arco. Fácil es encontrar la fórmula que exprese la citada diferencia entre la longitud del arco y la de la tangente, pero para apreciar su importancia en la Topografía daré el siguiente ejemplo:

"La diferencia entre un arco de 53'.5 que corresponde próximamente á 24 leguas mexicanas, y su tangente, no es más que de $2^m.00$, de manera que en una extensión de 10 á 12 leguas de radio, la superficie terrestre puede suponerse plana sin gran error, ó por lo menos el que resulta entra en el orden de los inherentes á las observaciones mismas." (2)

Como se ve por las cifras que preceden, es admisible dentro de amplios límites, la hipótesis de considerar el plano tangente como confundido con la superficie curva de la tierra. Esta última se considera como de revolución y se prescinde del relieve de los continentes é islas, imaginándose los mares uniformemente extendidos y tranquilos, en cuya posición de equilibrio la acción de la gravedad se ejerce en cada punto normalmente á la superficie de las aguas.

9. Entre las infinitas direcciones que pueden darse á los planos verticales, se elige también comunmente una fija que

(1) En una circunferencia, el arco de longitud igual al radio contiene 206.265 segundos, de donde resulta que el arco de 1 segundo tiene por longitud

$$\frac{6{,}366.740}{206.265} = 30^m86$$

para el caso de la tierra en el supuesto de las dimensiones anteriores.

(2) Díaz Covarrubias, Tratado de Topografía, pág. 3.

en todo tiempo es susceptible de volverse á determinar. Esta dirección es la del polo de la tierra; es decir, se adopta un plano que pasa por el eje terrestre y por el punto origen de coordenadas y que por lo tanto será perpendicular al plano horizontal. Ese plano se llama *meridiano* y su traza sobre el plano horizontal determina una línea que se llama *meridiana astronómica.*

Es común adoptar en pequeños trabajos, la dirección señalada por la aguja magnética para la del plano vertical, que en nuestro país difiere pocos grados de la dirección antes indicada; la traza del plano que contiene el eje de la aguja se llama *meridiana magnética.* Sin anticipar detalles que más tarde encontrarán su desarrollo, no será inútil hacer notar que la dirección dada por la aguja imanada es variable con la latitud y longitud de cada lugar, con la época y hora del día, etc., y por lo tanto, sólo se adopta para trabajos de escasa importancia y aun así es conveniente determinar el ángulo formado por los dos meridianos ó sea la declinación de la aguja.

Establecida la dirección de dos planos, el tercero que es también vertical, queda ya en posición conocida, puesto que es normal á aquéllos.

10. En el sistema de coordenadas polares se toma por plano fijo uno horizontal; por polo un punto arbitrario que es el denominado origen, en el sistema cartesiano, fija, y por recta la meridiana magnética ó la astronómica, según el caso.

El ángulo que forma el radio vector con la vertical se llama *distancia zenital* y el que forma la proyección horizontal del mismo con la meridiana, tóma, según el caso, el nombre de *azimut verdadero* ó *azimut magnético.*

11. Se supone, en general, cuando se trata de determinadas extensiones; que las meridianas de todos los puntos son paralelas entre sí, así como sus perpendiculares; pero si se reflexiona que la forma de la tierra es esférica, se comprenderá que las perpendiculares trazadas desde diversos puntos de una misma meridiana convergen hacia los puntos

Este y Oeste del horizonte y que todas las meridianas convergen hacia los polos de la tierra.

"Si en los extremos de una línea situada próximamente de Oriente á Poniente, se observan los azimutes directo é inverso de la misma, en lugar de encontrar entre ellos una diferencia de 180°, se hallará 180°, más ó menos una cantidad, que á la latitud media de la República puede estimarse en cosa de 1′ por cada legua de distancia, la cual proviene de la convergencia de las meridianas." (1)

Diaz Covarrubias da para calcular la convergencia de las meridianas la siguiente fórmula:

$$c = \frac{k \text{ sen. } u \tan. \varphi}{\rho \text{ sen. } 1''} \ldots\ldots(1)$$

En la cual k es la longitud de la línea; u su azimut, φ la latitud del lugar aproximada á 15′ ó 10′ y ρ el radio del meridiano terrestre.

En la fórmula, k sen. u es la proyección de la línea k sobre una perpendicular á la meridiana y llamando x esa proyección y F el factor

$$\frac{\tan. \varphi}{\rho \text{ sen. } 1''}$$

la fórmula será finalmente

$$c = F x$$

Los valores de F dependen de φ, y el mismo autor da sus logaritmos en forma de tabla, para latitudes desde 15° hasta 33° y variándolas de medio en medio grado. (Véase la tabla I al fin de este volumen.)

Para dos puntos cuya distancia proyectada sobre la perpendicular á la meridiana es de 16430^m y situados á la latitud $\varphi = 22° 29'$, la convergencia de sus respectivos meridianos es de $c = 3' 41''$.

(1) Díaz Covarrubias, op. cit. tomo I, págs. 158-161.

Si un azimut puede medirse, por ejemplo, con la aproximación de 2′, esta cantidad debe considerarse como el error posible de cada observación y excediendo de 4′ la diferencia entre los azimutes directo é inverso para una línea cuya proyección Este–Oeste sea de 4 leguas, el exceso debe atribuirse al efecto de la convergencia de las meridianas hasta el valor de 3′ 41″ dado antes.

Los anteriores renglones nos han dado idea de las diferencias que se observan entre los valores reales, y los adoptados cuando se admite que el plano tangente á la superficie de la tierra se confunde con ella misma, y nos muestran los límites hasta los cuales podemos extender nuestra hipótesis, según la precisión de los instrumentos y métodos empleados.

12. La determinación y representación gráfica de una grande extensión de la superficie terrestre, como por ejemplo la de una nación, se hace dividiendo aquella en fracciones menores, para las cuales pueda aceptarse como cierto el supuesto de la igualdad de una porción del plano tangente con la superficie curva y aplicando para ello los principios de la Geodesia (división de la tierra). Esta subdivisión equivale á la inscripción de la extensión por determinar, en un poliedro cuyas caras son bastante pequeñas para aplicar al levantamiento de sus planos los procedimientos topográficos.

13. Hemos recordado en los anteriores párrafos varios principios, que son si se quiere elementales, con el objeto de ligar estrechamente la exposición que hicimos del problema que se presenta al topógrafo, con la de los medios empleados para resolverlo; y fué preciso para establecer una relación, tener presente la necesidad de referirse á un sistema de ejes coordenados, ya que, como expusimos, consiste ese problema en la determinación de los puntos de una cierta extensión de la superficie terrestre por la medida de sus coordenadas; por ello fué indispensable el estudio de los planos ó líneas que se adoptan generalmente para referirles las posiciones de los puntos del terreno.

Necesitamos, como vimos, proveer los medios necesarios para medir directa ó indirectamente en el terreno:

I. *Líneas.*

II. *Angulos.*

y para poder fijar aquéllas y éstos es preciso determinar:

I. *Puntos.*

II. *Direcciones ó rectas.*

III. *Planos.*

La determinación de los ejes coordenados nos obliga á proveer los medios propios para poder establecer:

I. La dirección de la *vertical* y por consecuencia la que le es normal, la del *plano horizontal.*

II. La dirección ú orientación de uno de los planos verticales ó sea la de la *meridiana.*

III. La posición del plano horizontal fijo sobre la vertical ó sea la *altura* de éste sobre el nivel del mar.

Nos ocuparemos en este volumen: 1º, de los *medios* para *determinar puntos*, *líneas* y *planos*; 2º, de los empleados para el *establecimiento de los ejes coordenados*, y 3º, de los empleados para la *medición de las líneas y los ángulos.*

CAPÍTULO III.

De los diversos medios empleados para determinar un punto del terreno.

14. Elegidos en el terreno los puntos que deben observarse (1) ya por su importancia como puntos del perímetro ó como vértices de una triangulación, ya por pertenecer á construcciones, puentes, etc., que deban aparecer en el plano, preciso es ocurrir á medios adecuados para fijarlos y hacerlos conocer exactamente, permitiendo su observación desde

(1) Véase volumen II, capítulo I.

grandes distancias. Los puntos inmutables y elevados ya existentes en el terreno, como cimas de montañas, torres, chimeneas, ángulos de edificios, etc., si por su posición satisfacen á las condiciones de que hablamos especialmente en el 2º volumen (Elección de puntos), forman en general muy buenos vértices y á igualdad de otras circunstancias deben preferirse á los artificialmente demarcados.

Dos casos pueden presentarse con relación á la importancia de los vértices para operaciones ulteriores: ó bien debe conservarse su posición para referir á ellos otros trabajos, ó bien son ya inútiles después de ser observados. En el primero se construyen monumentos de mampostería de piedra ó ladrillo, en cuyo centro se deja una cavidad para colocar la señal que se observa, determinando el lugar exacto del vértice, pues las dimensiones de los monumentos son demasiado grandes para que ellos mismos sirvan de puntos de mira.

Entre las numerosas clases de construcciones que se han adoptado para señalar en el terreno los vértices permanentes, describiremos la que se usó por Bessel (fig. 2) para las operaciones geodésicas de la Prusia Oriental y que consiste en un cimiento de mampostería sobre el que reposa un paralelipípedo de piedra B; en el centro de la cara superior de éste, que se dispone perfectamente horizontal, se incrusta una pieza metálica de forma cilindro-cónica C, que tiene su eje vertical. Sobre la piedra B se apoya otro paralelipípedo del mismo material D, en cuya parte superior se coloca otra pieza C′ semejante á C. Los ejes de estas dos deben ocupar la misma vertical y la C′ hace veces de estilo que penetra en una esfera pulida muy brillante hasta que el vértice del cono C′ ocupe el centro de la última. La esfera tiene un diámetro que varía de 15 á 22 centímetros y refleja la luz del sol en todos sentidos, presentándose siempre al observador como un punto brillante, el cual no es otra cosa que la imagen virtual del sol. Esta imagen no ocupa constantemente el mismo punto, debido al movimiento de rotación de la tierra, pero es fácil

tener en cuenta el valor de ese desalojamiento, conociendo la hora de la observación y la latitud del lugar Este tipo de monumentos lo citamos como uno de los más perfectos, para dar al Topógrafo una idea, de la cual puede derivar disposiciones más ó menos sencillas, según las condiciones de cada caso.

Cuando la duración de las señales deba ser efímera, consisten en estacas, asta-banderas, etc., del diámetro y altura necesarios para que puedan ser observadas fácilmente. A este fin es común y conveniente el uso de banderas visibles por sus dimensiones y colores, elegidos de modo que formen fuerte contraste con el fondo sobre el cual se ven proyectadas, para facilitar el encontrar el asta que las sostiene y visarla con precisión.

15. Las dimensiones de las señales deben ser tales que se distingan fácilmente desde el punto más lejano del cual hayan de observarse. La regla para determinar el diámetro de una de aquellas, fundada en la agudeza normal de la vista y fácilmente aplicable, se enuncia en la siguiente fórmula:

$$d = 0.0004\ D$$

en la que d es el diámetro de la señal y D la distancia máxima de observación. Si esta se hace por medio de un telescopio cuyo aumento sea de M veces

$$d = 0.0004\ \frac{D}{M}$$

16. Las señales deben visarse lo más bajo posible colocándolas siempre verticales, y más aún debe cuidarse de este último detalle cuando no es visible el pie de ellas. Asimismo, es preciso fijarlas sólidamente en el suelo enterrándolas ó rodeándolas de piedras. Un buen medio para fijar las señales es el de forzar en el terreno un trozo cilíndrico de madera, de 18 á 20 centímetros de diámetro y taladrado en el centro, hasta que la base superior enrase con la superficie del suelo

y cada vez que sea necesario observar el punto se fija la señal en la cavidad del cilindro, y queda, por consiguiente, en el mismo sitio.

Díaz Cobarrubias recomienda como buenas las disposiciones de la figura 3, que consisten en un madero vertical ó tres, formando tripié, en cuya parte superior se coloca un haz de paja ó de cualquiera hierba que presente un punto de mira conveniente. El centro de estación, bajo el tripié, se determina por medio de una plomada. Asegura el notable ingeniero citado que con señales de esta clase ha podido formar triangulos cuyos lados excedían de seis leguas mexicanas, haciendo uso de instrumentos topográficos comunes.

Las señales más usadas son las que representa la figura 4.

17. En las mediciones subterráneas que ocurren para el levantamiento de planos de minas, trazos de túneles, etc., se emplean señales luminosas para determinar los puntos, ya sea indicándolas con la luz misma ó con un cuerpo iluminado por una lámpara.

Las señales que se emplean son pequeñas lámparas colgadas del techo de la galería ó dispuestas sobre un tripié y con una plomada que marque el lugar de proyección sobre el suelo. Como tipo de exacto presentamos el aparato que se ve en las figuras 5 y 6, y consiste en un disco transparente *d*, (representado en dos proyecciones verticales perpendiculares entre sí) el cual ilumina la lámpara **l**. El disco está montado sobre la pieza TT que puede girar sobre un eje vertical que atraviesa la parte B, la que va fijada en tres brazos que en sus extremos llevan los tornillos nivelantes v′ v″ v‴, y éstos reposan á su vez sobre un tripié que se coloca y centra en el punto que se desea fijar. En el extremo de la pieza T, opuesto al que soporta la lámpara, se encuentra colocado un nivel esférico **b** para hacer aquella horizontal. El punto exacto que se visa es el de cruzamiento de los diámetros horizontal y vertical del círculo **d**, hechos aparentes por dos líneas obscuras trazadas en su superficie.

El disco, transparente también, se usa dividido en 4 sectores iguales, dos de ellos blancos y dos rojos que determinan con facilidad el centro del círculo que es el punto de mira,

Se emplean también señales de lámina de fierro iluminadas por delante, ó placas metálicas en las que se corta una cruz, y detrás de las cuales se coloca la lámpara.

Otros operadores reemplazan las miras por hilos á plomo suspendidos del techo de la galería; detrás de ellos se coloca un papel aceitado que cubre la luz haciendola difusa.

Tales son las miras ó señales más generalmente usadas. que el ingeniero variará según las circunstancias especiales de cada caso y los medios que tenga á su disposición, utilizándolos para llegar á los mejores resultados.

CAPITULO IV.

De la determinación de las direcciones.

PRINCIPIOS DE ÓPTICA.

18. Según la teoría ondulatoria, la propagación de la luz se hace por una serie de pulsaciones ú oscilaciones de un fluido imponderable llamado éter; el modo de transmisión es en un todo comparable al de las ondas sonoras en el aire atmosférico. La longitud de la onda luminosa determina el *color;* así como la de la onda aérea hace la *altura* del sonido y de la amplitud de las oscilaciones de los átomos etéreos depende la *intensidad* de la luz; como de la amplitud de las oscilaciones verificadas por las moléculas del aire resulta la fuerza de un sonido.

19. La luz que nos llega del sol, la emitida por las substancias terrestres llevadas á un grado conveniente de temperatura, ó la de cuerpos iluminados que reflejan la emitida por

cuerpos luminosos, está formada por un gran número de radiaciones que se encuentran en cada luz en proporción variable.

En general, los cuerpos cuando se calientan empiezan á emitir radiaciones obscuras; á medida que aumenta la temperatura aparecen radiaciones más y más luminosas, es decir, capaces de impresionar la retina, cuyo fenómeno se comienza á producir hacia 600° y se manifiesta una nueva acción, la actínica. Si la temperatura es llevada á un grado más elevado, la actividad química de los rayos y la intensidad luminosa serán mayores; de modo que bajo la doble relación calorífica y luminosa, por ejemplo, se obtiene el máximum con la luz eléctrica, en la cual, al mismo tiempo que aumenta la intensidad luminosa es mayor el desprendimiento de calor.

20. Las tres formas de la radiación, *luminosa*, *calorífica* y *química* ó *actínica*, se hacen evidentes en la descomposición de la luz por el prisma triangular de cristal.

La diferencia de color depende, como dijimos antes, de la longitud de la onda, y ésta va disminuyendo del rojo al violado. En el rojo, junto á la raya A de Fraunhöfer es de 738 millonésimos de milímetro, y en el extremo violeta, junto á la raya I corresponde á 369. Estos son sensiblemente los límites del espectro *visible* ó sean los límites de sensibilidad del ojo humano.

El modo mismo de propagación del movimiento en superficies esféricas concéntricas, explica por qué la intensidad no permanece constante, sino que decrece en razón inversa de las superficies, lugar de los átomos sucesivamente excitados, ó sea en *razón inversa del cuadrado de la distancia al punto luminoso.*

21. En la teoría de las ondulaciones, los rayos luminosos no tienen existencia real; son las trayectorias ortogonales de las ondas sucesivas, y llamaremos rayo de luz ó rayo luminoso á toda recta llevada del punto luminoso normalmente á la superficie de la onda. La experiencia demuestra, en efec-

to, que la luz en un medio homogéneo se propaga en línea recta. (1)

Punto luminoso llamaremos á uno cualquiera sobre la dirección de la propagación, aun cuando no sea el punto mismo, origen del fenómeno luminoso.

22. Sobre el hecho antes establecido de la propagación en línea recta, está basada la posibilidad de fijar direcciones en el espacio.

Dos señales indican una direción por la línea recta que las une; y una sola señal que es visada por un observador, fija igualmente una dirección por el rayo luminoso que une aquella con el centro óptico del ojo del observador.

Una señal interpuesta entre otra y el ojo, ocultará la última, siempre que *se encuentre en el camino del rayo de luz*, ó sea sobre la *recta que determina la dirección* observada. Sobre este principio, deducido á su vez del de la *propagación rectilínea de la luz*, se fundan los aparatos empleados para determinar las direcciones, y cuya descripción formará el objeto del presente capítulo.

Antes de emprender el estudio de los aparatos ópticos recordaremos algunos principios de la óptica geométrica que serán aplicados en la exposición de la teoría de los prismas, alidadas, telescopios, etc., de que se sirve el topógrafo constantemente, porque *forman* importantísima *parte de los instrumentos de medida.*

Principios de óptica geométrica.

23. El hecho experimental de la propagación de la luz en línea recta, basta, repetiremos, para establecer la teoría geométrica de su marcha á través de uno ó diferentes medios.

Al llegar el movimiento luminoso á la superficie de sepa-

(1) Nos llevaría muy lejos el desarrollo de la teoría de la propagación en línea recta ó principio de Huyghens, y admitimos el hecho como cierto, desde el momento en que está adquirido por la experiencia y así basta á nuestro objeto.

ración entre el medio en que viene propagándose y otro de diferente densidad, una parte de aquél se extingue ó por mejor decir se propaga á las moléculas del segundo medio, dando origen á fenómenos que no impresionan ya la vista; otra parte se refleja y propaga en el medio anterior y otra se refracta y transmite en el segundo medio si es transparente, ó es absorbida á una pequeña distancia de la superficie, si es opaco.

Las diversas superficies de los cuerpos operan esta separación de diferentes maneras, ya respecto á *cantidad* ya á *calidad* ó color de la luz. La mezcla de los colores que quedan en la parte reflejada, produce la impresión de color de la superficie del cuerpo y de la mezcla de los que lo atraviesan, resulta la impresión de color de la masa que lo forma.

Sea **a b** (fig. 7) la intersección de la superficie que separa dos medios diferentes con el plano de la figura, é I O un rayo de luz que encuentra la superficie **a b**, formando con la normal O N un ángulo **i** llamado de incidencia.

La experiencia demuestra que una parte de la luz se refleja según O I′ formando un ángulo **r** con la normal, que se llama ángulo de reflexión y es igual á **i**, y que otra parte penetra al segundo medio y se refracta según O R formando con la normal un ángulo ρ. Todas estas rectas y la normal se encuentran en un mismo plano perpendicular al tangente en O á la superficie de separación de los dos medios y los ángulos **i**, **r** y ρ tienen entre sí las siguientes relaciones:

$$i = r \qquad (1)$$

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \rho} = m \qquad (2)$$

es decir: que la relación entre los senos de los ángulos de incidencia y de refracción es una cantidad constante para substancia y color dados. La experiencia así lo comprueba y esta cantidad sólo varía con las substancias que el rayo atraviesa y con el color de la luz incidente.

Si el medio en que se encuentra el rayo incidente es el menos denso de los dos, el rayo refractado se acerca á la normal y **m** es mayor que la unidad, verificándose lo contrario cuando la marcha del rayo luminoso es del medio más denso al menos denso.

La constante **m** se llama *índice de refracción* absoluto ó relativo. Llámase absoluto cuando da la relación entre los senos de los ángulos expresados, siendo el vacío uno de los dos medios, y relativo cuando los medios son cualesquiera.

Los índices de refracción adoptados habitualmente son los del aire á otra substancia. Los mayores son: el del cromato de plomo y el del diamante que respectivamente corresponde á 2.50 y 2.47. Entre otros índices citaremos los siguientes:

Flint glass.....	1.57
Crown glass.....	1.50
Agua.....	1.33

Para determinar los índices inversos, es decir, de la substancia más densa á la menos densa, bastaría dividir la unidad por el índice respectivo, toda vez que las condiciones son análogamente inversas.

En efecto, la ecuación (2)

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \rho} = m$$

nos hace conocer la posición respectiva de los rayos incidente y refractado, cualquiera que sea la naturaleza de los medios refringentes. Siendo los medios los mismos; si el rayo refractado se torna en incidente, éste á su vez se tornaría en refractado: así, si sustituimos **i** por ρ' y ρ por **i'** la ecuación anterior quedará convertida en

$$\frac{\text{sen } \rho'}{\text{sen } i'} = m$$

y dándole la forma de la ecuación fundamental, tendremos:

$$\frac{\text{sen } i'}{\text{sen } \rho'} = \frac{1}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

24. Como el valor del índice de refracción m ó $\frac{1}{m}$ es constante, un aumento ó una diminución en el valor de **i** produce aumento ó diminución en el valor de ρ. Examinemos estas indicaciones.

Si el rayo incidente es normal á la superficie de separación de los medios refringentes, el valor de i es igual á cero, y en ese caso las fórmulas (2) y (3) serán:

$$\frac{0}{\text{sen } \rho} = m \qquad \frac{0}{\text{sen } \rho'} = \frac{1}{m}$$

de donde:

$$\text{sen } \rho = \frac{0}{m} = 0, \qquad \text{sen } \rho' = m \times 0 = 0$$

De donde se deduce que si el rayo luminoso forma con la normal en el punto de incidencia un ángulo igual á cero, no sufre desviación alguna, sea que pase de un medio más denso á otro menos denso ó viceversa.

Al ir aumentando el valor de **i** aumentará á su vez el de ρ para que **m** no deje de ser constante y cuando el primero llegue á su máximo, alcanzará el de ρ su mayor valor. Así, siendo $i = 90°$ su seno será igual á 1 y las ecuaciones (2) y (3) se transformarán en:

$$\frac{1}{\text{sen } \rho} = m, \quad \text{de donde.....} \ \text{sen } \rho = \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{\text{sen } \rho} = \frac{1}{m}, \quad \text{de donde.....} \ \text{sen } \rho = m$$

Este máximo valor de ρ se llama ángulo límite, (1) porque para un valor mayor de ρ sería preciso que sen. i fuera mayor que 1, lo cual es imposible, y en efecto, la experiencia de-

(1) Para el paso del vidrio al aire el ángulo límite es de 41° 48′.

muestra que no hay ya refracción alguna; se produce entonces una *reflexión total* en la línea de separación de los dos medios refringentes. (1)

25. Dijimos que el valor de **m** varía con las substancias y hemos visto en qué consiste esta variación, suponiendo que el rayo cuya marcha estudiamos es monocrómico. Para estudiar experimentalmente la marcha de los rayos, se hace uso de un rayo de luz simple y para determinar exactamente su color, que varía imperceptiblemente de un lugar á otro cercano del espectro, se ocurre á un punto preciso del mismo que se identifica siempre que es necesario por la constante posición que ocupan en el espectro solar las rayas de Fraunhöfer.

Las diversas radiaciones de un punto luminoso, tienen índices de refracción diferentes y que van aumentando de la

(1) Cuando se conoce la dirección del rayo incidente y el índice m, se determina la dirección del rayo refractado por medio de la construcción siguiente (fig. 8). Del punto de incidencia O y en el plano de incidencia, se describen dos semicircunferencias A y B cuyos radios son respectivamente 1 y $\frac{1}{m}$ y se lleva la tangente O T á la superficie M M′ de separación de los dos medios. Se prolonga el rayo incidente S O hasta su encuentro con la circunferencia A; se traza la tangente A T y por T la tangente B T á la otra circunferencia; se unen O y B. Este es el rayo refractado. En efecto, los triángulos O A T, O B T dan

$$\text{sen } i = \text{sen. O T A} = \frac{1}{\text{O T}}$$

$$\text{sen B O N}' = \text{sen O T B} = \frac{1}{\frac{m}{\text{O T}}}$$

de donde

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen B O N}'} = m$$

y por consiguiente, puesto que B O N = B T O,

$$\text{B O N}' = \rho$$

Esta construcción permite reproducir geométricamente la discusión que antes hicimos. El ángulo límite l se obtiene trazando la tangente C′ K (Jamin, Cours de Physique).

onda más larga á la más corta ó sea del rojo al violeta. Para un vidrio dado **m** pasa de 1.62775 en el rojo, á 1.67106 en el violeta.

El rayo incidente, de luz solar por ejemplo, al refractarse se descompondrá en una multitud de colores y producirá como imagen en lugar de un punto una faja, que es la llamada espectro solar, en la que se ven separadas las diferentes radiaciones de que hablamos al principio de este capítulo, por efecto del diverso valor de los coeficientes de refracción de las ondas según sus diferentes longitudes.

Reflexión.—Espejos planos.

26. Los espejos son superficies pulidas capaces de reflejar la luz con regularidad. Los metales bruñidos, el mercurio líquido, el agua, el vidrio y otros cuerpos ofrecen ejemplos de semejantes superficies.

La experiencia demuestra que no todos los espejos reflejan la misma cantidad de luz, sino que esta varía con la substancia y con el grado de pulimento de la superficie.

La cantidad de luz reflejada igualmente varía con el ángulo de incidencia del rayo luminoso, siendo mayor cuanto mayor es este ángulo, y por lo tanto, para dar los coeficientes de reflexión, se adopta una incidencia constante que es la normal al espejo. En esta dirección un espejo metálico refleja $\frac{2}{3}$, el mercurio $\frac{1}{2}$, el vidrio $\frac{1}{40}$ y el agua $\frac{1}{50}$ de la luz incidente.

La parte de luz que no es refractada ni reflejada regularmente por un cuerpo, sino que se refleja en todos sentidos, se llama luz difusa. La atmósfera terrestre, interponiéndose entre el sol y nosotros, aun cuando es un cuerpo transparente, presenta sin embargo en cada una de sus moléculas un obstáculo á la libre propagación de la luz, y esas moléculas reflejando en todos sentidos la solar, iluminan los cuerpos aunque no estén expuestos directamente á los rayos del sol.

Los objetos así iluminados participan de la propiedad de

los cuerpos luminosos de irradiar la luz en todos direcciones.

La palabra punto luminoso, que emplearemos en adelante, convendrá igualmente para indicar un punto que por sí mismo sea origen de luz y para aquel que esté iluminado por luz difusa. No es este el lugar de explicar la diferencia que existe entre la luz directa y la reflejada, pues para nuestro estudio puramente geométrico de la marcha de los rayos luminosos, no tiene influencia la expresada diferencia.

Sea M un punto luminoso (fig. 9); P′ P la intersección de un espejo con el plano de la figura; M O un rayo incidente y O L el reflejado, satisfaciendo á la ley

$$i = r$$

Sea M P otro rayo incidente normal al espejo; este rayo se reflejará en una dirección coincidente con la M P.

Si prolongamos los rayos M P y L O se encontrarán en M′ y este punto será la imagen del punto M, como es fácil comprender. El observador colocado en L recibe una impresión como si el punto luminoso estuviese en M′.

Los triángulos M O P, M′ O P siendo iguales, P M′ es igual á P M, es decir, que *la distancia de un punto á su imagen es doble de la del punto al espejo.*

27. Supongamos que movemos el espejo paralelamente á ís mismo alejándolo del objeto una cantidad **d**, y llamemos **a** la distancia del espejo al objeto antes de mover aquél. La separación entre el objeto y su imagen será en virtud de lo demostrado en el párrafo anterior, 2 **a**. Después del movimiento la distancia será 2 (**a** + **d**) y la diferencia entre estas dos cantidades ó sea 2 **d** expresará que la *imagen se alejó del objeto una distancia doble del movimiento del espejo.*

Si ahora suponemos un movimiento angular del espejo, tendremos, representando por M N el espejo en primera posición (fig. 10); por M′ N′ el mismo después de desalojarlo un

ángulo α; por A O el rayo incidente que forma con el espejo el ángulo i; y por O B el reflejado en la primera posición:

$$A\,O\,M = B\,O\,N = i$$

Después del movimiento el ángulo de incidencia será $M'\,O\,A = i - \alpha$, y el rayo reflejado O B′ formará con el espejo el ángulo.

$$N'\,O\,B' = i - \alpha;$$ igual al ángulo de incidencia.

El rayo se habrá desalojado un ángulo.

$$B'\,O\,B = B\,O\,N' - B'\,O\,N' = i + \alpha - (i - \alpha) = 2\,\alpha$$

es decir, que el *desalojamiento angular de la imagen es doble del desalojamiento angular del espejo.*

Este principio encuentra su aplicación en los sextantes y en los prismas alineadores como veremos más adelante.

28. Supongamos que la reflexión no se hace sobre un espejo metálico sino sobre un espejo de vidrio que tenga plateada su cara posterior y paralela á la anterior, y sea la sección de éste representada por A B C D, en la que C D es la cara plateada, M el punto luminoso y M O un rayo incidente (fig. 11).

Al llegar el rayo de luz al punto O se divide en dos partes, la una se refracta de O á P y la otra se refleja según O L formando el ángulo x′ O L = x′ O M = i. El rayo que llegó á P se refleja hacia Q sobre la superficie brillante y forma con la normal á ésta un ángulo ρ dado por la fórmula:

$$\text{sen}\ \rho = \frac{\text{sen}\ i}{m};$$

formando en Q el mismo ángulo de incidencia ρ con la normal á la cara de entrada. Al tocar en Q, en parte se refracta y vuelve al aire, y en parte se refleja hacia la cara inferior en P′. La parte refractada toma la dirección Q L′ paralela á O L, puesto que siendo el vidrio de caras paralelas el án-

gulo ρ de refracción á la entrada es igual al ángulo ρ' de incidencia á la salida. Prolongando las rectas L O y L′ Q hasta encontrar la normal al espejo trazada desde M, determinaremos dos puntos M′, M″. El punto M′ no es otra cosa que la imagen virtual del punto M respecto al espejo representado por A B y el punto M″ es también la imagen virtual de M; pero respecto de otro espejo hipotético que estaría representado por la recta A′ B′ trazada por el punto C de intersección de M O y L′ Q prolongadas.

Otro rayo M Q reflejado según Q L″ dará otra imagen del punto M en M′; M′ será de diferente intensidad de M″, puesto que la superficie metálica, como ya se dijo, refleja mucho más que el vidrio.

La divergencia entre los rayos que vienen de M′ y M″, ó sea el ángulo L″ Q L′ que llamaremos φ, es la diferencia entre los ángulos L″ Q x‴ y L′ Q x ‴ ó

$$\varphi = i' - i$$

y siendo δ el espesor del vidrio
d la distancia M Q
m el índice de refracción,

en el triángulo M O Q tendremos:

$$O\,Q = d\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos i}$$

y el o′ P Q

$$Q\,o' = \delta \tan \rho$$

$$\text{y } O\,Q = 2\,Q\,o' = 2\,\delta\,\frac{\operatorname{sen}\rho}{\cos\rho} = \frac{2\,\delta \operatorname{sen} i}{m\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{m^2}}} = \frac{2\,\delta \operatorname{sen} i}{\sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 i}}$$

y eliminando O Q

$$\frac{d \operatorname{sen}\varphi}{\cos i} = \frac{2\,\delta \operatorname{sen} i}{\sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 i}}$$

y

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{2\,\delta}{d} \cdot \frac{\operatorname{sen} i \cos i}{\sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 i}};$$

de esta fórmula se deduce que φ varía con el ángulo i, con el índice de refracción y con la relación $\frac{2\delta}{d}$ la cual tiende á cero á medida que aumenta d y se hace nula para

$$d = \infty$$

En la práctica generalmente se puede admitir como igual á cero el valor $\frac{2\delta}{d}$ para un valor d de algunas decenas de metros y un espesor del cristal de algunos milímetros que son las condiciones habituales.

Como hicimos ver, el rayo P Q no emerge completamente del cristal sino que se refleja en parte hacia P, en donde vuelve á reflejarse y da lugar á una tercera imagen más débil que las precedentes en M''' y así sucesivamente. Pero, en las condiciones prácticas el valor de φ puede considerarse nulo y debe usarse esta clase de espejos, en atención á que tienen sobre los metálicos la ventaja de conservarse indefinidamente, mientras que las superficies pulidas de aquellos se opacan y rayan á poco tiempo de ser usadas.

30. Cuando las caras de un espejo de vidrio no son paralelas, sino que forman entre sí un ángulo α, el ángulo φ tiene por valor:

$$\varphi = 2\,\alpha \sec i \sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 i}$$

Es fácil encontrar esta fórmula que hace ver el resultado de la falta de paralelismo de las caras.

Por ejemplo, para una incidencia $i = 60°$ y $m = 1.50$ se obtiene:

$$\varphi = 4.899.\ \alpha$$

A la simple vista pueden distinguirse, para puntos muy luminosos, divergencias de 60'' y por tanto se vuelve ya sensible el defecto de paralelismo entre las caras, suponiendo una incidencia de 60°, para un ángulo α de 12'' próximamente.

Se comprende así el por qué de la importancia de la perfecta construcción de los cristales destinados á espejos para instrumentos de precisión; sobre todo si se nota que el em-

pleo del telescopio aumenta la agudeza de la vista, proporcionalmente á su poder de amplificación. La dificultad de construcción se apreciará observando que sobre el lado de una pieza de cristal de 10 centímetros por ejemplo, el segundo de arco está representado por $\frac{100^{mm}}{206.\ 265}$ ó sea $0^{mm}0005$.

Refracción.—Prismas.

31. Sea A B C, la sección de un prisma de vidrio, I F un rayo monocrómico, contenido en el plano del dibujo (fig. 12). Es claro que la marcha E F R del rayo, estará en el mismo plano. Sean **i** é **i'** los ángulos exteriores en E y F contados desde la normal positivamente hacia la base B C del prisma y negativamente hacia A; ρ y ρ' los ángulos interiores contados positivamente hacia A y negativamente hacia la base; de tal modo que en el caso de la figura los ángulos i, ρ, i' y ρ' serán positivos.

Tendremos: $\text{sen}\ i = m\ \text{sen}\ \rho$..... (1)

$\text{sen}\ i' = m\ \text{sen}\ \rho'$..... (2)

Las normales en E y en F se encuentran en O. En el cuadrilátero A E O F el ángulo O es suplementario de A; en el triángulo E O F el mismo ángulo es suplementario de $\rho + \rho'$ de donde:

$$A = \rho + \rho' \text{.....} \quad (3)$$

Los rayos incidente y emergente, prolongados, forman en D un ángulo δ, llamado *ángulo de desviación* y que contaremos como positivo á partir del rayo incidente prolongado y hacia la base del prisma y como negativo en sentido contrario. El triángulo D E F da

$$\delta = DEF + DFE = (i - \rho) + (i' - \rho') = i + i' - A \text{...} \quad (4)$$

Tenemos así cuatro relaciones entre las siete cantidades **i**, **i'**, ρ, ρ', **m**, A y δ y estas relaciones son generales, gracias

á la convención sobre los signos. Bastará conocer tres cantidades para calcular las otras cuatro.

32. *Discusión.* 1º Si el rayo incidente se confunde con B A, ρ es el ángulo límite; ρ' que es igual á A — ρ, toma el valor mínimum y este puede ser negativo, nulo ó positivo según el valor de A. Supongamos que A aumente en abertura y que la cara de emergencia (fig. 13) sea sucesivamente A C, A C′, A C″, etc. El rayo D E hace en E, E′, E″, un ángulo de incidencia interior ρ' que es negativo, nulo ó positivo; crece á la vez que A y acaba por ser igual ó superior al ángulo límite cuando la superficie de salida alcanza ó pasa de A C‴. En estos diversos casos el ángulo en i' va aumentando con ρ'; es negativo en E, nulo en E′ y positivo en E″. El rayo emergente toma las direcciones E R, E′ R′, E″ R″; se dirige más y más hacia la base del prisma y acaba por sufrir la reflexión total en E‴.

2º Disminuyamos el ángulo i de + 90° á — 90°, entonces ρ' y por consecuencia i' aumentará. El rayo emergente, por pequeño que sea A, tenderá á inclinarse hacia la base del prisma, y se reflejará totalmente para un valor determinado de i.

Para $i = o$; $\rho = o$ y la ecuación (4) se transforma en

$$\delta = i' - A$$

y la ecuación (2) en:

$$\text{sen}\,(\delta + A) = m \text{ sen } \rho' = m \text{ sen } A,$$

puesto que $\rho' = A$ por tener los dos ángulos sus lados respectivamente perpendiculares.

De donde:

$$m = \frac{\text{sen}\,(\delta + A)}{\text{sen } A}.$$

Midiendo experimentalmente los ángulos A y δ se cono-

cerá el índice de refracción de la substancia que forma el prisma. (1)

Según el método de Descartes, se emplea para determinar **m** un prisma de ángulo A muy pequeño (véase la nota de la página 55).

El ángulo de desviación δ depende de i é i', y como i' está ligado con el índice **m** por las relaciones (2) y (1) resulta que á igualdad de incidencia variará el ángulo de desviación con el índice de refracción de cada substancia, y si suponemos esta constante, variará con el color de la luz. En el ejemplo que nos ha servido antes, supusimos una luz monocrómica; pero si ésta fuese por ejemplo la luz solar, el ángulo de desviación para cada rayo de los muchos que la componen será variable, y en vez de obtener por imagen del punto luminoso un punto también, obtendremos la banda multicolor del espectro solar. Para un vidrio dado, el índice **m** para el rojo es

de..... 1.62775
y para el violeta..... 1.67106

pero pasando de un color á otro la variación es continua, y para hacer medidas homogéneas, ó sea correspondientes siempre al mismo color, se define el punto del espectro por *las rayas* que lo cortan, y cuya posición se conoce perfectamente, no dependiendo de la apreciación del color hecha por el observador.

Si hacemos el ángulo

$$A = o$$

ó lo que es igual, si consideramos un sólido con sus caras de incidencia y emergencia paralelas, en las fórmulas (3) y (4) tendremos:

$$\rho + \rho' = o \qquad (1')$$
$$\delta = i + i' \qquad (2')$$

(1) Jamin. (Cours de physique. Tomo 1º pág. 96).

y para que se verifiquen estas ecuaciones es preciso que:

$$\rho = -\rho'$$

de donde se deduce:

$$\text{sen } i = -m \text{ sen } \rho' \ldots\ldots \quad (3')$$
$$\text{sen } i' = m \text{ sen } \rho' \ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

y entonces:

$$\text{sen } i = -\text{sen } i'$$
$$i = -i' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

y en la (2′) $\delta = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$

lo que prueba que el rayo emergente estará en prolongación ó será paralelo al incidente.

Es muy posible que, deseando el constructor hacer un vidrio de caras paralelas, no obtenga este resultado por las inevitables imperfecciones de la mano de obra. En ese caso A será un ángulo muy pequeño en lugar de ser nulo, y tendremos las fórmulas:

$$\text{sen } i = m \text{ sen } \rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
$$\text{sen } i' = m \text{ sen } \rho' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
$$\rho' = \rho - A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$
$$\delta = i - i' + A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

tomando en cuenta para las dos últimas el signo negativo de ρ' é i', como se ve en la figura 13; teniendo presente la convención sobre los signos. Sustituyendo en la ecuación (8) el valor de ρ de la ecuación (9) tendremos:

$$\text{sen } i' = m \text{ sen } (\rho - A)$$

y restando de ésta la (7), miembro á miembro, se obtiene:

$$\text{sen } i' - \text{sen } i = m \text{ sen } (\rho - A) - m \text{ sen } \rho;$$

y $2 \cos \frac{1}{2} (i' + i) \text{ sen } \frac{1}{2} (i - i') = m \text{ sen } \rho \cos A - m \text{ sen } A \cos \rho - m \text{ sen } \rho = \text{sen } i \cos A - \text{sen } i - m \text{ sen } A \cos \rho.$

Pero como:

$$\cos \rho = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \rho} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 i}{m^2}}$$

tendremos por último:

$$2 \cos \tfrac{1}{2} (i' + i) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (i - i') = \operatorname{sen} i \cos A - \operatorname{sen} i - \operatorname{sen} A] \times$$
$$\times \sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 \rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Pero como hemos dicho que A es muy pequeño, podemos suponer:

$$\operatorname{sen} A = A; \cos A = 1; \cos \tfrac{1}{2} (i + i') = \cos i;$$
$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (i - i') = i - i'$$

y sustituyendo en la (11) tendremos:

$$i - i' = - A \frac{\sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 \rho}}{\cos i} \ldots\ldots \quad (12)$$

este valor sustituído en la ecuación (10) da

$$\delta = A (1 - \sec i \sqrt{m^2 - \operatorname{sen}^2 \rho}).$$

Si el ángulo i es tan cercano á cero que pueda suponerse:

$$\operatorname{sen} i = i \text{ y } \cos i = 1$$
$$(*) \ \delta = A (m - 1) \ldots\ldots \quad (13)$$

De la ecuación (13) se deduce que la desviación que sufre el rayo luminoso, muy cercano á la normal, que atraviesa un sólido de caras paralelas es constante. Este principio sirve de base al micrómetro de prismas aplicado al telémetro Gautier que describimos en el capítulo sobre *medida indirecta de las líneas.*

(*) De aquí se deduce un valor de **m** y esta fórmula: $m = 1 + \frac{\delta}{A}$ da un medio para determinar los valores de los índices de refracción; pero siendo la relación $\frac{\delta}{A}$ entre cantidades pequeñas, un error mínimo en la medida de cualquiera de ellas puede alterar notablemente el valor de **m**.

Acromatismo.

35. Hemos visto que el prisma produce una desviación del rayo de luz simple, y una dispersión del rayo luminoso cuando no es monocrómico. El efecto de esta última es, como hemos repetido, el dar por imagen del punto luminoso una faja con los colores del espectro. Si por desviación media tomamos la de la raya **D** de Fraunhöfer situada en el medio próximamente del espectro, los rayos rojos habrán sido menos desviados y los violetas más que el rayo **D**. El ángulo formado por esos y estos rayos extremos, se llama ángulo de *dispersión.*

Si se construyen varios prismas con una misma substancia la desviación media y la dispersión son siempre proporcionales.

No sucede lo mismo cuando se cambia la materia refringente.

Es posible cortar dos prismas de flint y crown glass bajo ángulos A y A′ tales que, ó bien produzcan una *misma desviación* media $\delta_{\prime\prime}$ y una *dispersión* $\delta_7 - \delta_1$ *muy desigual* ó bien una *dispersión igual* y muy *diferente desviación.*

Si sobreponemos los dos prismas en opuesto sentido, el efecto total que produzcan, será igual á la diferencia de los efectos ó acciones individuales, y sucederá en el primer caso que el haz luminoso no será desviado y en el segundo se desviará en el sentido determinado por el prisma de crown, pero ya no estará colorido. Se dice entonces que está *acromatizado* dicho rayo.

Supongamos dos prismas de crown y flint, cuyos ángulos inversamente colocados, llamaremos A y A′ (fig. 14), y representemos por M O P Q R la marcha de un rayo luminoso; llamaremos i, i', ρ y ρ' los ángulos de incidencia y refracción en el primer prisma.

Si A y A′ son muy pequeños podemos tomar los arcos i, i', ρ y ρ' por sus senos y tendremos:

$$i = m\rho;\ i' = m\rho';\ \delta_1 = i + i' - A = (m_1 - 1)\,A \ldots\ldots (14)$$

designando en estas fórmulas con el índice (1) los valores de δ y m para el ángulo de desviación é índice de refracción del rayo rojo.

En el segundo prisma tendremos llamando δ'_1 la desviación que produce sobre el mismo rayo dicho segundo prisma:

$$\delta'_1 = (m'_1 - 1)\ A' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

y la desviación definitiva será:

$$\triangle_1 = \delta_1 - \delta'_1 = (m_1 - 1)\ A - (m'_1 - 1)\ A' \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

y para el color al que daremos el índice (7).

$$\triangle_7 = \delta_7 - \delta'_7 = (m_7 - 1)\ A - (m'_7 - 1)\ A' \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

para que el rojo sea paralelo al violeta se necesita que

$$\triangle_1 = \triangle_7$$

$$(m_7 - m_1)\ A = (m'_7 - m'_1)\ A'$$

$$\frac{m_7 - m_1}{m'_7 - m'_1} = \frac{A'}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Si unimos los dos prismas, cuyos ángulos cortamos con la abertura que resulta para ellos de la ecuación última, los dos rayos incidentes rojo y violeta que entraron sobrepuestos ó paralelos, emergen sobrepuestos ó paralelos. Y si el haz que penetraba al prisma era de luz blanca, el rayo emergente presentará los colores rojo y violeta coincidentes, sobrepuestos como en la luz blanca incidente. Obtenidos los ángulos A y A′, se acromatizarían por el prisma formado con los dos A y A′ los demás colores del espectro, si la relación entre los índices de refracción tomando aquellos dos á dos, fuere constante; pero como esto no se verifica, el acromatismo sólo se consigue para dos puntos del espectro, que se eligen en la

práctica buscando con el ojo, que las imágenes se presenten lo mejor acromatizadas que sea posible. (1)

Esto se satisface recomponiendo los rayos de luz más intensos, y dejando á un lado aquéllos para los que el ojo es menos sensible.

Los cristales más empleados son el crown y el flint. El primero es de base de potasa y el segundo de base de plomo; el poder dispersivo del crown es menor que el de flint, y su índice de refracción varía del rojo al violeta

desde 1.52583 para el rojo.
hasta 1.54656 para el violeta.

El incremento total es de 0.02073

Y el flint tiene un índice que varía

desde 1.62775 para el rojo.
hasta 1.67106 para el violeta.

Y el incremento total es de 0.04331

En ambos casos la diferencia entre los índices de los colores extremos, es bastante pequeña para poder admitir que la diferencia genérica

$$m - m'$$

para los colores intermedios, es una diferencial de **m** y podremos poner

$$\frac{A}{A'} = \frac{dm}{dm'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

como la ecuación de condición del acromatismo.

(1) Para conocer diversos valores del primer miembro de la ecuación (18), que se llama relación de dispersión parcial, y para diferentes substancias combinadas por pares, véase la página 172 del tomo tercero de la obra de A. Jamin. Cours de Phisique.

Refracción en una superficie esférica.

36. Para colocarse desde luego en condiciones análogas á las que se presentan en la construcción óptica de los instrumentos topográficos, supondremos que la superficie que separa los medios, sea un casquete esférico de pocos grados de abertura y que el rayo de luz incidente se aleje pocos grados de la normal á dicha superficie, en el punto de incidencia.

Sea A B un arco del círculo máximo que produce el plano de la figura al cortar una esfera cuyo centro sea **C** y que supondremos de vidrio, siendo el aire el medio hacia el que presenta su convexidad (fig. 15).

Supongamos en el mismo plano del dibujo un rayo de luz monocrómico M O que parte del punto M y encuentra en O la superficie del vidrio, formando con la normal C O el ángulo de incidencia **i** y refractándose según O P, formando con la misma línea el ángulo ρ, ligado con el **i** por la ley conocida

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \rho} = m; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

m siendo el índice de refracción correspondiente á la substancia y al color del rayo luminoso.

Busquemos el punto P en que el rayo refractado encuentra la normal M D

Llamaremos R al radio de la esfera;
φ al ángulo O M D;
C al ángulo D C O;
P el ángulo O P D;
a la longitud D M;
é y la longitud D P.

En el triángulo M O C el ángulo:

$$i = \varphi + C$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) y admitiendo que

los ángulos son bastante pequeños para tomar los arcos por los senos, tendremos:

$$\frac{\varphi + C}{\rho} = m \text{ y } \rho = \frac{\varphi + C}{m}$$

Por otra parte y dada la pequeñez de los ángulos,

$$C = \frac{a\,\varphi}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

de donde

$$\rho = \frac{R + a}{R\,m}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

El ángulo externo C del triángulo C O P es

$$C = P + \rho; \text{ y } P = C - \rho$$

Sustituyendo los valores de C y ρ en esta última ecuación se obtiene:

$$P = \frac{a\,\varphi}{R} - \frac{R + a}{R\,m}\,\varphi = \frac{[m - 1]\,a - R}{R\,m}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Y la longitud D P $= y$, en el triángulo D O P está dada por la relación:

$$y = \frac{a\,\varphi}{P}$$

y sustituyendo por P su valor (3)

$$y = \frac{m\,a\,R}{(m - 1)\,a - R}$$

que puede ponerse bajo esta forma:

$$\frac{m - 1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{m}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

De esta última ecuación puede deducirse el valor de y conociendo los otros elementos **R, a** y **m**; lo que demuestra que y es independiente del ángulo de incidencia i; ó si se quiere, del ángulo φ, y por consiguiente cualquiera otro rayo que

parta de M y llegue á la superficie del vidrio bajo un ángulo suficientemente pequeño, al refractarse irá á parar por el punto P.

Por tanto, toda la energía luminosa que se propaga en el espacio cónico determinado por la rotación de un rayo análogo á M O, poco distante de la normal á la superficie separante de los medios, se encontrará en un punto único P, para seguir después más allá de P como si éste fuera el centro del fenómeno luminoso como lo es M.

Si el ángulo φ no es muy pequeño, los rayos refractados no cortan el eje en un solo punto. No hay foco, sino una superficie cáustica.

Se dice que en el punto P se forma la *imagen real* de M, para distinguirlo del punto del cual parece venir el rayo luminoso sin que en él haya concentración efectiva de luz, como vimos para los espejos planos que forman una imágen *virtual* y no *real.*

37. La ecuación (4) es general siempre que se convenga en el signo de **a** y **R.** Si la superficie que divide los dos medios es cóncava, **R** será negativo; si el punto radiante fuese un punto de convergencia de un haz de luz que estuviera más allá de la superficie de separación; se consideraría **a** negativo y se tendría en cuenta también para el valor del índice de refracción, si el paso se hace de un medio más denso á uno menos denso ó al contrario.

Lentes.

38. Se llama lente á un cilindro de cristal homogéneo transparente, de pequeñísima altura y cuyas bases son casquetes esféricos cóncavos ó convexos, ó bien tienen una base plana y la otra en forma de casquete esférico cuyos centros están sobre el eje del cilindro.

La figura (16) representa la sección hecha en una lente cuyos dos casquetes son convexos (llamada biconvexa) por un

plano que pasa por el eje del cilindro. Esta línea se llama *eje de la lente* ó *recta de los centros* b, b', de las esferas á que aquellos pertenecen.

Para colocarse desde luego en las condiciones comunes de forma, espesor, etc., de las lentes que se emplean en los instrumentos topográficos, supondremos que la abertura de la lente, esto es, el ángulo que forman los radios de la esfera, que van al contorno de los respectivos casquetes mida pocos grados, de modo que pueda admitirse lo que antes supusimos al estudiar la refracción por una superficie esférica: que no hay error al tomar el arco por el seno, dejando á un lado en el desarrollo de su valor, las potencias superiores á la primera.

Supongamos también que el espesor de la lente, ó sea la distancia entre las dos superficies curvas, en relación con las otras dimensiones de la lente y con la longitud de los radios de las dichas superficies, sea bastante pequeña para no tomarla en cuenta.

Sea M. un punto luminoso situado en el eje de la lente; M O un rayo cualquiera de luz que encuentra la lente en O, se refracta en su interior á O′ y vuelve á sufrir aquí otra desviación al salir al aire, según la recta O′ Q.

Busquemos la posición del punto Q.

Llamemos R y R′ los radios de curvatura C A, C′ B de las dos esferas á que pertenecen las dos superficies que forman la lente; a la distancia M A del punto luminoso á la lente, α la distancia B Q del punto Q á la misma lente; m el índice de refracción del vidrio empleado, según el color del rayo de luz (que por ahora supondremos monocromática); y la distancia A P al lugar de la imagen como en el caso del párrafo 36, y v el espesor de la lente.

La ecuación (4) da

$$\frac{m-1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{m}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Considerando la refracción análoga á la anterior en la superficie B; pero teniendo en cuenta los signos y el valor del coeficiente de refracción; en vez de R tendremos — R'; la distancia a será en este caso — $(y-v)$ y en lugar de m, $\frac{1}{m}$.

Entonces la fórmula se hace

$$\frac{\frac{1}{m}-1}{-R'}=\frac{-1}{y-v}+\frac{1}{\frac{m}{a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ó bien

$$\frac{m-1}{R'}=\frac{1}{a}-\frac{m}{y-v}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

y si consideramos como nulo el espesor de la lente, ó mejor dicho, como despreciable en relación con y, tendremos:

$$\frac{m-1}{R'}=\frac{1}{a}-\frac{m}{y}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

eliminando $\frac{m}{y}$ entre esta ecuación y la (1), se obtiene:

$$\frac{m-1}{R}+\frac{m-1}{R'}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

También en este caso a es independiente del ángulo de incidencia, y por lo mismo todos los rayos comprendidos dentro del cono que limita M O girando al rededor del eje, irán á concentrarse en Q, formando en este punto la imagen real de M.

Supongamos que este último punto se encuentre á tal distancia de la lente que $a=\infty$ y llamemos p el valor particular de a en el caso $\frac{1}{a}=0$; la fórmula anterior se convierte en

$$\frac{m-1}{R}+\frac{m-1}{R'}=\frac{1}{p}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

eliminando el primer miembro de esta ecuación con el de la (5), tendremos

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

39. Como se ve por la ecuación (6), el valor de p es constante para cada lente y se llama *distancia focal principal* de la lente; α y a se llaman, una respecto de la otra, *distancias focales conjugadas*, indicando así la perfecta reciprocidad de la distancia de un punto luminoso á la lente y la distancia de su imagen; de modo que los puntos M y Q pueden ser recíprocamente la imagen uno del otro. La ecuación (7) se enuncia en esta forma:

Dada una lente *la suma de las razones inversas de dos distancias focales conjugadas es constante é igual á la razón inversa de la distancia focal principal.*

De la ecuación (6) se obtiene:

$$p=\frac{R\,R'}{(m-1)\,(R+R')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

y la ecuación (7) cuando se conocen **p** y **a** da para α

$$\alpha=\frac{a\cdot p}{a-p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Si en estas suponemos $a=p$ tendremos

$$\alpha=\infty$$

lo cual confirma la reciprocidad absoluta que existe entre el punto luminoso y su imagen producida por una lente; de modo que si el punto luminoso se coloca á una distancia igual á la focal principal, el haz cónico que tiene por vértice el punto luminoso y por base la lente, se transforma en un haz cilíndrico y los rayos de luz emergente serán paralelos. Así, pues, sobre el eje de una lente hay dos puntos bien característicos que gozan de la propiedad de ser el lugar de convergencia de los rayos paralelos después de refractados, ó la ima-

gen de un punto situado en el infinito. Estos puntos, llamados *focos principales*, están situados á uno y otro lado de la lente y se llaman *anterior* y *posterior;* el primero está del lado del punto luminoso, y el segundo del lado contrario.

40. Las lentes pueden ser biconvexas como la que nos ha servido de ejemplo, y para ello hemos considerado R y R′ positivos. Si una de las superficies es cóncava, uno de los radios de la lente se toma negativo; si una de las superficies se plana, el radio es infinito, etc.; es decir, que en cada caso debe tomarse el valor y signo propios para el radio.

41. Si al resolver la ecuación (18) **p** resulta negativo, concluiremos que la lente no puede dar imagen real, y el foco se encuentra del lado de la lente opuesto al en que se halla el foco en la lente biconvexa, ó sea del lado que vienen los rayos de luz. Llámase entonces á la lente *divergente*, á diferencia de la que da **p** positivo, que se llama *convergente.*

Sea una lente bicóncava A B (fig. 17) y R, R′ los radios de curvatura de sus caras, que en el caso serán negativos. La fórmula (8) se hace

$$-p = \frac{R\,R'}{(m-1)(R+R')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

El rayo de luz que viene de un punto M situado al infinito se refracta siguiendo una dirección divergente O P Q cuya prolongación va al punto F, situado, como ya diijmos, del mismo lado que el punto luminoso. La distancia B F es la que llamamos **p**; F es un foco principal, pero como no hay en él concentración efectiva de luz se llama *virtual.* Lo mismo se verifica para otro punto F′ situado del otro lado de la lente para los rayos que se marchen en la dirección de O á M.

Si al resolver la ecuación (9) se encuentra para a un valor negativo, esto significará que el foco conjugado se encuentra del lado mismo del que viene la luz; pero debe observarse que también puede obtenerse para a un valor negativo, siendo **p** positivo si **a** < **p** (véase ecuación (9)), es decir, que para

una lente convergente la imagen será virtual, si el punto luminoso está entre la lente y el foco principal, y la lente en ese caso se conducirá como divergente.

Pongamos la fórmnla (8) bajo otra forma, dividiendo numerador y denominador por R′,

$$p = \frac{R}{(m-1)\left(\frac{R}{R'}+1\right)}$$

Si suponemos plana una de las dos caras de la lente

$$R' = \infty$$

y

$$p = \frac{R}{m-1}$$

y R será positivo ó negativo, según que la cara curva sea convexa ó cóncava.

42. Continuaremos considerando como nulo el espesor de una lente cualquiera y representemos por A B la sección hecha en ella por el plano de la figura, y sea M O Q la marcha de un rayo luminoso refractado por la lente (fig. 18).

Busquemos el valor del ángulo C Q O bajo el cual el rayo encuentra el eje.

Supuesta la pequeña abertura de la lente, puede ponerse en el triángulo C Q O:

$$CQO = \frac{CO}{CQ}$$

pero C O $= y \times$ C P O y C Q $= a$

$$CQO = \frac{y}{a}\ \text{CPO}.$$

y como C P O $= \frac{a\,\varphi}{y}$

$$CQO = \frac{a}{a}\,\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

que es la expresión buscada en el supuesto de que pueda des-

preciarse el espesor de la lente y que esta sea de poca abertura con relación á C Q.

Resumiendo; podemos deducir todas las circunstancias de posición de la imagen del punto M, de las ecuaciones (1), (4) y (11).

La ecuación (7) nos enseña que á medida que el punto luminoso se aleja, es decir, á medida que crece **a** disminuye α, y la imagen se acerca á la lente hasta llegar al foco principal en el caso antes expuesto de un punto situado en el infinito. Más adelante discutiremos esa fórmula para las diversas formas de las lentes y las diferentes posiciones del punto luminoso.

43. Si deseamos conocer la situación de la imagen de un punto M′ que dista de M una distancia que llamaremos **u**; en la ecuación (5) pondremos $a + u$ en vez de **a** y $\alpha - v$ en lugar de α, llamando **v** la distancia Q Q′ y tendremos en la ecuación (5) poniendo los nuevos valores é igualando los segundos miembros:

$$\frac{u}{a\,(a+u)} = \frac{v}{\alpha\,(\alpha - v)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

y el ángulo en $$Q' = \frac{a+u}{\alpha - v}\,\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Elevemos en M una perpendicular al eje hasta encontrar en **m** el rayo nuevamente considerado y prolonguemos el rayo refractado que pasa por Q′ hasta encontrar en **q** la perpendicular al eje tirada por Q. Demostraremos que **q** es la imagen del punto **m** supuesto luminoso. Al efecto, llamemos Z la longitud M m, y z la Q q.

En el triángulo Q Q′ q tendremos (suponiendo los ángulos muy pequeños)

$$z = v \times Q' = v\frac{a+u}{\alpha - v}\,\varphi$$

y sustituyendo por φ su valor $\frac{Z}{u}$,

$$z = \frac{v}{u} \times \frac{a+u}{a-v} \times Z;$$

pero por la ecuación (12) se ve que el coeficiente de Z es $\frac{a}{a}$ tendremos:

$$z = \frac{a}{a} \times Z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Siendo este valor independiente de **u** y de **v** y dependiendo sólo de **a** y α cualquier otro rayo de luz que parta de **m** y encuentre la lente debe necesariamente ir á pasar por **q**, y **q** será la imagen real del punto **m**.

Lo que hemos demostrado para **m** puede igualmente probarse para todos los puntos de la normal al eje: *Mm* y si esta es una recta luminosa, en *Q q* se formará otra recta, imagen real de la primera.

La fórmula (14) nos demuestaa por su misma forma que los puntos de la recta *M m* corresponden con las imágenes relativas, por el hecho de que deben encontrarse sobre una misma recta como la *m Cq*, que es la que encuentra al eje en el punto origen de **a** y α, el cual admitiendo como igual á cero el espesor de la lente, es el centro de figura de ésta.

En la sección considerada en la figura anterior no sólo los puntos de la normal *M m*, sino todos los del círculo descrito por su rotación al rededor del eje, darán imágenes correspondientes, que formarán nn círculo imagen del formado al girar *M m* y producido por la rotación de *Q q*.

La línea **m q** se llama *eje secundario* de la lente y es la que recorre un rayo sin refractarse; pero para que esto último se verifique es preciso admitir como nulo el espesor de aquella, pues no siéndolo, el rayo sufrirá una refracción, aunque no una desviación, es decir, que el emergente y el incidente serán paralelos.

La introducción del espesor de la lente, en los cálculos, no

altera las anteriores conclusiones y habríamos siempre obtenido la proporcionalidad entre Z y z expresada así:

$$z = \frac{k+v}{k-v} \cdot \frac{a}{a} \cdot Z$$

siendo k la distancia de Q al vértice de la lente y 2 v el espesor de la misma.

44. Existe para cada punto radiante un rayo análogo á **m** O (fig. 19), el cual al llegar á O se refracta según O P, y en P emerge siguiendo una dirección P q paralela á **m O**. Si prolongamos las rectas **m O** y q P se determinan sobre el eje dos puntos N′ y N″ llamados *puntos nodales.*

Los triángulos M m N′ y N″ Q q son siempre semejantes, de modo que la propiedad antes enunciada no sufre alteración, pero la correspondencia entre los puntos luminosos y sus imágenes respectivas se enuncia como sigue:

Las imágenes de los puntos de una figura plana luminosa normal al eje se encuentran también en otro plano normal al mismo eje de la lente y que pasa por el punto imagen del luminoso situado sobre el eje de la lente. Y precisamente los puntos imágenes correspondientes de los reales de la figura, quedan determinados por la intersección con el plano de la imagen de las paralelas á los rayos que van de los puntos reales al nodal N′ trazadas por el punto nodal N″.

El punto C en que la línea O P encuentra al eje se llama el centro óptico de la lente, y goza de la propiedad de ser común á todos los rayos análogos á **m O** que parten de la figura plana luminosa. No obstante continuaremos considerando que el espesor de la lente relativamente á las distancias focales conjugadas, es bastante pequeño para considerarlo despreciable, en cuyo caso los dos puntos nodales se confundirán en uno solo en el centro óptico ó centro de figura de la lente. Esta suposición es admisible, porque en el uso que de las lentes se hace en los instrumentos topográficos, se presentan efectivamente distancias focales en relación á las cuales es insig-

nificante el espesor de los cristales; pero sin embargo, en la tercera Parte nos ocuparemos del efecto de este espesor para dar idea de su importancia.

Así, pues, admitiremos que dada una figura sobre el eje de una lente convergente, la luz se reune después de atravesarla refractándose, de modo que forma una imagen real de la figura misma, y que todo punto del objeto tiene su correspondiente sobre la imagen real y ambos están colocados sobre una recta que pasa por el centro de figura de la lente. La imagen es, pues, una figura invertida y semejante á la que la produjo; sus dimensiones homólogas serán entre sí como las respectivas distancias al centro de la lente.

45. Si ponemos la ecuación (9) bajo la forma

$$\alpha = \frac{p}{1 - \frac{p}{a}} \qquad (15)$$

veremos que á medida que a crece, α tiende más á ser igual á p y alcanza este valor para $a = \infty$; pero á fin de observar la marcha numérica de esta variación, hagamos por ejemplo $p = 1^{m.}00$ y a sucesivamente igual á $100^{m.}$, $1{,}000^{m.}$ y $10{,}000^{m.}$, encontraremos:

$$\alpha = 1.0101, \quad \alpha = 1.001001 \quad \alpha = 1.00010001;$$

las variaciones de α son como se ve pequeñísimas, pues para un aumento de 900 p se tiene una variación de 0.01 de p, y para uno de 9,000 el aumento es de 0.009 p. Así los varios puntos que forman un objeto, pueden considerarse á la misma distancia de la lente, ó mejor dicho, como proyectados sobre un plano inmediato al objeto y perpendicular al eje de la lente. La imagen, por lo tanto, será plana.

46. Resumiremos los diversos casos respecto á posición del punto luminoso y su imagen y forma de las lentes, y para ello consideraremos éstas divididas en dos grupos, las convergentes y las divergentes.

Las primeras se llaman:

α *biconvexa*, β *plano convexa* y γ *menisco convergente*, y las segundas: α' *bicóncava*, β' *plano cóncava* y γ' *menisco divergente* (fig. 20).

47. Estudiemos la relación del objeto á su imagen en *las convergentes*, recordando la fórmula general:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}.$$

Los dos focos son reales. El F_1 corresponde á los rayos que van de X'' á X', y el F_2 á los que marchan en opuesta dirección.

Puesto que el valor de p es constante en cada lente, veamos los valores que adquiere α, en los diversos que puede tener **a**, ó sea la distancia del objeto á la lente.

I. Si $a=\infty$;

la fórmula general se transformará en:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p} \quad \text{ó} \quad \alpha=p$$

la imagen será real y se encontrará en el foco principal.

II. Disminuyendo el valor de **a**; pero teniendo siempre $a>p$, por ejemplo (fig. 21):

$$a=p+b.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula $\alpha=\frac{a\,p}{a-p}$ tendremos:

$$\alpha=\frac{p^2+p\,b}{b}=p+\frac{p^2}{b}$$

la distancia de la imagen (que también es real) á la lente, será mayor que la distancia focal principal, y tanto mayor cuanto **a** se acerque más á ser igual á p; la imagen, pues, se desaloja del foco principal al infinito.

Si $a=2\,p$, tendremos

$$\alpha=2\,p.$$

En este caso la imagen y el objeto estarán equidistantes de la lente y será igual la magnitud de ambos.

III. Suponiendo $a = p$, resultará $\alpha = \infty$, que se traduce diciendo que la imagen se forma en el infinito.

IV. Cuando $a < p$ (fig. 22).

$$a = p - b$$

valor que sustituído en la fórmula general da

$$\alpha = \frac{(p - b)\,p}{-b} = p - \frac{p^2}{b}$$

y como b es menor que p, el segundo término será el que determine el signo de α, el cual será siempre negativo, lo que significa que la imagen es virtual.

El valor absoluto de α será tanto mayor cuanto menor sea la diferencia entre **a** y **p**: por lo tanto, la imagen se acercará al foco principal á medida que el objeto se acerque á la lente.

Si $a = \frac{p}{2}$

$\alpha = -p$, es decir, la imagen será virtual y estará en el foco principal.

Si suponemos $a = 0$, tendremos:

$\alpha = 0$, ó lo que es lo mismo, no se producirá imagen. Así, disminuyendo la distancia del objeto á la lente, desde la mitad de la distancia focal principal, la imagen se irá acercando á la lente hasta llegar al valor de cero.

48. Por consideraciones análogas á las que hicimos al tratar de las lentes convergentes, obtendremos los resultados que siguen *para las divergentes:*

En estas los dos focos son virtuales. El F_1 corresponde á los rayos que marchan de X_2 á X_1, y el F_2 á los que marchan en la dirección opuesta.

I. Si $a = \infty$,

la fórmula general nos dará recordando el signo de α:

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \text{ ó } \alpha = -p,$$

la imagen será virtual y estará colocada en el foco principal.

II. Dando á a valores finitos decrecientes, pero con la condición de que $a > p$ (fig. 23).

$$a = p + b,$$

valor que sustituído en la fórmula, la transformará en

$$\alpha = \frac{p\,(p + b)}{-b} = -p - \frac{p^2}{b}$$

valor esencialmente negativo que determina la virtualidad de la imagen. El valor absoluto de α depende del valor de b; así, á medida que éste decrezca, ó lo que es lo mismo, á medida que el objeto se acerque al foco principal, la imagen se alejará más y más de éste.

Si $a = 2\,p$, tendremos entonces:

$$\alpha = -2\,p$$

en este caso, la imagen y el objeto estarán sobrepuestos y se confundirán.

III. Cuando el objeto se encuentre en el foco principal:

$$a = p \text{ y } \alpha = \infty,$$

la imagen se formará en el infinito.

IV. Cuando $a < p$ (fig. 24).

$$a = p - b$$

valor que sustituído en la fórmula, reducirá ésta á:

$$\alpha = \frac{p\,(p - b)}{b} = -p + \frac{p^2}{b}$$

como b es menor que p, el valor de a será positivo. La distancia de la imagen al foco principal irá disminuyendo á medida que el objeto se acerque á la lente.

$$\text{Cuando } a = \frac{p}{2}$$

$$a = p$$

En este caso la imagen se presentará en el foco principal. Si suponemos $a = 0$ obtendremos:

$$a = 0,$$

ó lo que es lo mismo, la imagen se sobrepone al objeto. Así, pues, disminuyendo la distancia del objeto á la lente, desde $\frac{p}{2}$ la imagen real se irá acercando á la lente hasta confundirse con el objeto cuando **a** sea igual á cero.

Cuando M se aleja de F_1 al infinito, el punto m viniendo del infinito se aproxima indefinidamente á F_2.

REFRACCIÓN Á TRAVÉS DE UN SISTEMA DE LENTES.

49. Si un rayo luminoso en lugar de atravesar una sola lente pasa á través de un sistema formado de varias dispuestas sobre el mismo eje, como por ejemplo las que representamos por las líneas I, II y III (fig. 26), el rayo luminoso M O que parte del punto M sobre el eje, al encontrar la primera lente se refracta y forma una imagen **m**′ entre las lentes I y II. Continuando el rayo su marcha, alcanza la segunda lente; vuelve á sufrir la refracción en ésta y forma una imagen en m'' que es la conjugada de **m**′; al seguir el rayo su marcha á la tercera lente y refractarse de nuevo, forma en **m**‴, en la intersección con el eje de las lentes, una tercera imagen. Así continuaría la marcha del rayo si se aumentara el número de lentes.

Designemos por **p, q, r,**..... las distancias focales principales de las lentes; por **a, b, c,**..... las distancias del punto radiante á la primera lente y de sus imágenes á las lentes sucesivas.

Llamemos α, β, γ..... las distancias conjugadas de **a, b, c,**..... y **d′, d″**, las distancias de las lentes entre sí: A B, B C,..... tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r} \end{array}\right\} \text{.....} \quad (16)$$

etc., etc.....

y por otra parte

$$d' = \alpha + b \qquad d'' = \beta + c.$$

etc.

Estas ecuaciones subsisten simultáneamente formando un sistema, y vemos que para tres lentes tenemos cinco; bastantes para determinar todos los elementos desconocidos puesto que conocemos **a**, p, q, r, d' y d''. En general, dado un sistema de **n** lentes, se tendrá siempre un sistema correspondiente de $(2n - 1)$ ecuaciones y otras tantas incógnitas, y por lo mismo no presenta dificultad alguna la resolución de este problema; sólo advertiremos que las imágenes sucesivas serán reales ó virtuales según que las cantidades α, β, γ..... sean positivas ó negativas.

50. Supongamos ahora (figura anterior) que en **M** se eleve una recta M E normal al eje y que represente una dimensión lineal de un objeto.

Sea E A el rayo, eje secundario correspondiente á E y sean e', e'', e''',..... los puntos imágenes sucesivas de E. Las rectas $m' e'$, $m'' e''$, $m''' e'''$ normales al eje, representan las imágenes sucesivas de M E.

Llamemos Z, z', z'', z''' las dimensiones de M E y de las imágenes sucesivas (M E = Z, $m' e' = z'$, etc.).

Tendremos (ecuación 14) para la primera lente

$$z' = \frac{\alpha}{a} Z$$

para la segunda lente

$$\left.\begin{array}{l} z'' = \frac{\beta}{b} z' = \frac{\alpha\,\beta}{a\,b} Z \\ \text{para la tercera lente} \\ z''' = \frac{\gamma}{c}\; z'' = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{a\,b\,c} Z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

y así sucesivamente.

Conocidos los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ por la previa resolución del sistema de ecuaciones (16), del (17) se deducirá fácilmente la relación de magnitud entre las líneas semejantes de las imágenes que se forman sucesivamente.

51. Si á la magnitud del objeto queremos sustituir el valor del ángulo bajo el cual aquel se presenta, observado del centro de la primera lente y llamamos C este ángulo que admitimos como muy pequeño:

$$C = \frac{Z}{a} \text{ y } Z = C\,a$$

y con este valor puede Z eliminarse de las ecuaciones fundamentales (16) y (17) y todos los problemas relativos á la posición y magnitud de las imágenes deducirse de sencillos cálculos algebraicos. Se tiene:

$$z' = \alpha\, C, \quad z'' = \frac{\alpha\,\beta}{b}\, C, \quad z''' = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{b\,c}\, C, \text{ etc. } \ldots\ldots (17')$$

52. En el sistema que elegimos como ejemplo y que consideraremos como normal, las imágenes sucesivas son todas reales, y caen entre una y otra lente, lo que equivale á decir que ninguna de las cantidades análogas á **d**, **p**, **q**, **r**,... es negativa, y que las cantidades análogas á **d** son siempre mayores que las correspondientes análogas á α, con lo cual se admite que **b**, **c**,..... son también cantidades positivas.

En este caso es fácil ver que la primera imagen será invertida; la segunda estará en posición natural, la tercera invertida, etc., lo que está indicado desde luego por ser z', z'', z'''.... positivas.

Si en el sistema se introduce una lente divergente, la distancia focal principal correspondiente debe considerarse negativa, ó si este mismo signo es el de una de las **b**, **c**,..... (lo cual sucedería si una de las **d** fuese menor que la distancia α correspondiente) se encontraría para alguno de los valores de **z** una cantidad negativa. Esto significaría que la imagen resulta en posición contraria á la que ocuparía en el sistema de lentes que tomamos como normal.

53. Busquemos las modificaciones de magnitud del radio de la sección del espacio cónico luminoso, cuyo vértice es M y su base el contorno de la primera lente, al llegar á las lentes sucesivas. Llamemos Y el radio de la primera lente; y′, y″,.... los radios sucesivos B P, C Q,..... de las secciones buscadas en las otras lentes (fig. 26).

Los triángulos semejantes A O m′, P B m′ etc. dan:

$$BP = \frac{m'B}{Am'} \text{A O}$$

ó sea,

$$y' = \frac{b}{\alpha} \text{Y}$$

y del mismo modo encontraremos

$$y'' = \frac{b\,c}{\alpha\,\beta} \text{Y} \qquad \text{..... (18)}$$

$$y''' = \frac{b\,c\,d}{\alpha\,\beta\,\gamma} \text{Y}$$

.....

El aumento.

54. Veremos más tarde que el objeto principal de los sistemas de lentes es hacer mayor la potencia del sentido de la vista, procurando aumentar las dimensiones, por decirlo así, del fenómeno fisiológico del cual la sensación misma (en su parte objetiva) viene á depender. Consideraremos mientras tanto, como otro de los elementos de un sistema de lentes, el

aumento. Daremos este nombre á la *relación entre el ángulo* que una dimensión lineal dada z_n de una imagen formada por un sistema de n lentes dispuestas sobre el mismo eje subtiende á la distancia fija y arbitraria h tomada sobre el eje, y *el ángulo* que la dimensión homóloga del objeto real que la proyecta, subtiende á otra distancia fija y arbitraria H. Estos dos ángulos están representados según la suposición admitida por:

$$\frac{z_n}{h} \text{ y } \frac{Z}{H}$$

y por definición el aumento que llamaremos A es igual á

$$A = \frac{\frac{z_n}{h}}{\frac{Z}{H}} = \frac{z_n}{Z} \cdot \frac{H}{h}$$

tomando de las ecuaciones (17) el valor de las relaciones análogas á $\frac{z_n}{Z}$ y sustituyendo en la anterior tendremos para el caso de una sola lente:

$$A = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{H}{h}$$

para dos lentes:

$$A = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{H}{h}$$

para tres lentes:

$$A = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{a\,b\,c} \cdot \frac{H}{h}$$

etc., etc.

55. Existen dos clases bien distintas de sistemas ópticos: la una comprende los destinados á aumentar la potencia visual del ojo para los objetos muy lejanos y sirve para la composición de los instrumentos llamados *anteojos* ó *telescopios;* la otra comprende los destinados á aumentar la potencia visual

para los objetos muy pequeños, al alcance del observador, y sirve para la composición del microscopio.

56. Para los sistemas de la primera clase se toma por H la distancia misma á la que se encuentra el objeto observado

$$H = a$$

y h se toma igual á la distancia mínima á la que ve bien un ojo normal y la cual se llama *distancia normal de la vista distinta.*

57. Para los sistemas de la segunda clase se considera

$$H = h$$

é iguales ambos valores á la distancia de la vista distinta.

Para los telescopios las anteriores fórmulas se hacen sustituyendo el valor de $H = a$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Una lente} & A = \frac{a}{h} \\ \text{dos} \quad ,, & A = \frac{a\,\beta}{h\,b} \\ \text{tres} \quad ,, & A = \frac{a\,\beta\,\gamma}{h\,b\,c} \\ \text{..... etc., etc. .....} & \end{array}\right\} \text{.....} (19)$$

y para los microscopios:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Una lente} & A = \frac{a}{a} \\ \text{dos} \quad ,, & A = \frac{a\,\beta}{a\,b} \\ \text{tres} \quad ,, & A = \frac{a\,\beta\,\gamma}{a\,b\,c} \\ \text{..... etc., etc.....} & \end{array}\right\} \text{.....} (20)$$

Combinando las ecuaciones (18) y (19) encontramos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para dos lentes} & A = \dfrac{Y\beta}{y'\,a} \\ \text{„ tres „} & A = \dfrac{Y\,\gamma}{y''\,a} \\ \text{„ cuatro „} & A = \dfrac{Y\,\delta}{y'''\,a} \\ \text{..... etc., etc. .....} & \end{array}\right\} \text{.....} \quad (21)$$

58. Veremos adelante que es una buena condición para la visibilidad, el que la imagen dada por la última lente de un sistema aparezca al observador como si ella misma estuviese á una distancia infinita, y para simplificar las ecuaciones sin salir mucho de las condiciones prácticas supongamos, para los telescopios: $a = \infty$ y respectivamente á los varios casos de dos, tres, cuatro, etc., lentes.

$$\beta = \infty\,,\ \gamma = \infty\,,\ \delta = \infty\,,\ \text{etc.}$$

se tendrá en las ecuaciones (19) combinándolas con las (16:)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para una lente} & A = \dfrac{p}{h} \\ \text{„ dos „} & A = \dfrac{p}{q} \\ \text{„ tres „} & A = \dfrac{p\,\beta}{b\,r} \\ \text{..... etc., etc.....} & \end{array}\right\} \text{.....} \quad (22)$$

y en correspondencia:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para dos lentes,} & A = \dfrac{Y}{y'} \\ \text{para tres „} & A = \dfrac{Y}{y''} \\ \text{para cuatro „} & A = \dfrac{Y}{y'''} \\ \text{..... etc., etc .....} & \end{array}\right\} \text{.....} \quad (23)$$

59. De donde se deduce que en un sistema cualquiera de lentes en el que toda la luz que pase por la primera, pase por las sucesivas, el aumento (1) es igual á la relación entre el diámetro de la lente primera y el del haz cilíndrico luminoso que emerge de la última. Al estudiar el telescopio nos ocuparemos de la interpretación concreta de las últimas ecuaciones.

Aberraciones de las lentes.

60. Para simplificar los cálculos, en todo el estudio que hemos venido haciendo de las lentes, supusimos que el rayo de luz que las atraviesa es monocrómico, que la abertura de las lentes es pequeñísima, así como su espesor y que el ángulo bajo el cual se presenta el objeto es también muy pequeño y apenas hicimos notar que si el ángulo φ que subtiende el objeto no lo es tanto, en lugar de un punto focal se tiene una superficie, llamada cáustica por refracción.

Pero en realidad estas condiciones no se presentan en la práctica; la luz que los objetos nos envían es siempre una mezcla de luces diversamente coloridas, y el espesor y abertura de las lentes son siempre cantidades finitas.

En cuanto á la influencia del color de la luz, desde que tratamos de la refracción á través de un prisma, vimos que la variación del color corresponde á una variación en el valor del índice de refracción **m** y la ecuación (5) del presente capítulo nos hace ver que para un valor constante de **a** habrá tantos de a, ó lo que es lo mismo tantos focos, como valores diversos tenga el índice de refracción **m**. Así pues, una lente no nos producirá una sola imagen sino muchas; una inmediatamente á continuación de otra y ocupando un pequeño espacio, dado que **m** varía entre límites muy restringidos. (2)

(1) Interpretado como se dijo al principio.

(2) Para una lente de crown de 5^m de foco medio (raya D) se encuentra que el foco rojo (raya B) es de 5^m0357, y el foco violeta (raya H) de 4^m84467; la

Las variaciones de α producen también variaciones en la magnitud de la imagen (véanse ecuaciones (17)), que será tanto mayor cuanto mayor sea α, y como ésta crece cuando disminuye **m** se deduce que los rayos rojos, para los cuales **m** es menor, darán imágenes más grandes que los rayos violetas, ó lo que es lo mismo, se tendrá de un punto una serie de imágenes concéntricas y que crecerán del violeta al rojo. Si se coloca una pantalla en el foco de los rayos violetas, la luz refractada por la lente dibujará sobre la pantalla un círculo de centro blanco por la sobreposición de las imágenes coloridas y con bordes rojos; mientras que sobre una pantalla colocada en el foco rojo se obtendrá un círculo de centro blanco y por lo mismo de bordes violetas.

El efecto anterior se produce para todos los elementos superficiales de un objeto y por lo tanto no altera su forma y lleva el nombre, por la causa que lo produce, de *aberración cromática.*

61. Otro fenómeno se observa debido á la forma de la lente, y se llama *aberración de figura.*

Para demostrar que los rayos luminosos partidos de un punto y refractados por una ó varias lentes, se reunen en un solo punto, nos sirvió de base el supuesto de que los rayos encuentran á la lente formando con el eje de ésta ángulos muy agudos y la reunión del haz refractado en un solo punto, será tanto más perfecta cuanto mejor realizada se encuentre la hipótesis fundamental de nuestras fórmulas; es decir, cuanto más cerca del centro de la lente incidan los rayos luminosos. A medida que los rayos se aproximen á los bordes del cristal, la concentración variará más y más, de tal modo

aberración entre B y H tiene entonces por valor $p_B - p_H = 0.19103$ ó cosa de 0^m19. (Jamin, op. cit. pág. 126.)

En una lente cuyo foco para los rayos centrales está á 10 m. atrás de la superficie refringente la aberración es de $0^m001523$, para una abertura de tres grados, y de 0^m1523 para una abertura de 30°; la aberración λ es del orden de magnitud de θ, θ siendo la semiabertura.

que cada zona concéntrica de la lente presentará su foco particular, como para el caso de los diversos colores de una luz.

62. El cálculo de las aberraciones es largo y difícil, y en esta sencilla recordación de los principios de la óptica geométrica no podría encontrar su lugar; máxime porque á quienes principalmente interesa es á los constructores de instrumentos ópticos. La teoría de las lentes ha sido expuesta extensamente y de modo admirable por matemáticos y físicos tan eminentes como Euler, Gauss, Fraünhofer, etc., y puede verse en las obras especiales de óptica; aquí daremos como demostrados principios que más adelante hallarán su aplicación.

Entre estos conviene recordar que se ha demostrado que las lentes plano convexas, volviendo su convexidad á los rayos incidentes, son en general más ventajosas, bajo el punto de vista de las aberraciones, que las biconvexas y meniscos del mismo foco; y que dos lentes plano convexas que se presentan sus convexidades son convergentes con aberraciones moderadas.

También se ha demostrado que si la superficie curva de la lente es la de un paraboloide de revolución, no se presenta aberración de figura; pero además de que en la práctica la construcción de semejantes superficies es difícil ó imposible, el análisis teórico demuestra que esta cualidad de la superficie parabólica sólo subsiste para puntos cercanos al eje de la lente; fuera de esto, se recaería en el inconveniente mismo que presentan las superficies esféricas.

63. Hemos visto en el párrafo sobre acromatismo, que mediante la combinación de dos prismas de substancias diversas se consigue destruir la divergencia entre los rayos emergentes de diversos colores. Para las lentes se recurre al mismo artificio reuniendo dos ó más, en lugar de una sola, de las cuales una es convergente y la otra ú otras divergentes y formadas de cristales de diverso poder dispersivo, para compen-

sar con unas lentes la aberración producida por otra, obteniendo por compensación la eliminación de sus efectos.

Examinemos la cuestión bajo un punto de vista general; primero para el caso de una sola lente, y luego para el de un sistema de dos ó más:

Recordemos las ecuaciones:

$$\frac{1}{p} = \frac{m-1}{R} + \frac{m-1}{R'} \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$$

Vimos ya que α y **p** varían con **m**.

Diferenciando la primera de las anteriores ecuaciones se obtiene, dividiendo previamente ambos miembros por $(m-1)$:

$$\frac{1}{p\,(m-1)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

y la diferencial será:

$$-\,dp = \frac{d\,m}{m-1} \cdot p;$$

Diferenciando la segunda ecuación se obtiene:

$$-\frac{d\,p}{p^2} = -\frac{d\,\alpha}{\alpha^2}$$

y eliminando á $d\,p$ entre las dos últimas

$$d\,\alpha = -\frac{\alpha^2}{p} \cdot \frac{d\,m}{m-1};$$

$d\,\alpha$ es la variación de α correspondiente á una variación **d m** del índice de refracción y se llama *aberración longituninal de refrangibilidad.*

Consideremos ahora una segunda lente colocada sobre el mismo eje y hecha con otra clase de vidrio, cuyo índice de refracción sea **m'**, y **dm'** la variación, correspondiente á **dm**. Conservando las mismas notaciones que en las anteriores páginas tendremos:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{q} = \frac{m'-1}{R} + \frac{m'-1}{R'''}; \quad \alpha + b = d$$

y diferenciando:

$$\frac{d\,q}{q^2} = \frac{d\,b}{b^2} + \frac{d\,\beta}{\beta^2}; \quad d\,q = -\frac{d\,m'}{m'-1}\,q; \; d\,b = -d\,\alpha$$

Sustituyendo en la primera los valores de la segunda y de la $d\,\alpha$ encontrada antes, se obtiene:

$$-\frac{d\,m'}{m'-1}\,\frac{1}{q} = -\frac{d\,\alpha}{b^2} + \frac{d\,\beta}{\beta^2}$$

$$d\,\beta = -\left(\frac{d\,\alpha}{b^2} + \frac{d\,m'}{m'-1}\,\frac{1}{q}\right)\beta^2$$

$$= -\left(\frac{d\,m}{m-1}\,\frac{1}{p} + \frac{d\,m'}{m'-1}\,\frac{b^2}{\alpha^2}\,\frac{1}{q}\right)\frac{\alpha^2\,\beta^2}{b^2}$$

Si el sistema fuese compuesto de tres lentes la fórmula sería:

$$d\,\gamma = -\left(\frac{d\,m}{m-1}\,\frac{1}{p} + \frac{d\,m'}{m'-1}\,\frac{1}{q}\,\frac{b^2}{\alpha^2} + \frac{d\,m''}{m''-1}\,\frac{1}{r}\,\frac{b^2\,c^2}{\alpha^2\,\beta^2}\right)\frac{\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2}{b^2\,c^2}$$

y así sucesivamente.

Así como pasa con $d\,\alpha$ para una lente, $d\,\beta$, $d\,\gamma$, etc., representan los valores de las aberracciones longitudinales de refrangibilidad en un sistema compuesto de dos ó más lentes.

Es evidente que para anular la aberración de refrangibilidad es necesario hacer $d\,\alpha$, $d\,\beta$, $d\,\gamma$, etc., iguales á cero.

Pero como el valor del factor de fuera del paréntesis no puede ser nulo, haremos el otro igual á cero y tendremos para una lente:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d\,m}{m-1}\,\dfrac{\alpha^2}{p} = 0 \\[2ex] \text{para un sistema de dos:} \\[2ex] \dfrac{d\,m}{m-1}\,\dfrac{1}{p} + \dfrac{d\,m'}{m'-1}\,\dfrac{1}{q}\,\dfrac{b^2}{\alpha^2} = 0 \\[2ex] \text{y para uno de tres:} \\[2ex] \dfrac{d\,m}{m-1}\,\dfrac{1}{p} + \dfrac{d\,m'}{m'-1}\cdot\dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{b^2}{\alpha^2} + \dfrac{d\,m''}{m''-1}\cdot\dfrac{1}{r}\,\dfrac{b^2\,c^2}{\alpha^2\,\beta^2} = 0 \\[2ex] \text{etc., etc.} \end{array}\right\} \quad (24)$$

La constitución de estas ecuaciones confirma y aclara dos puntos de la cuestión. 1º Que para una sola lente es imposible nulificar la aberración á menos que $p = \infty$ para lo cual sería preciso:

$$R = R' = \infty$$

es decir que la lente fuera un vidrio plano de caras paralelas; y 2º que por ser los términos de los anteriores polinomios (correspondientes á diversos sistemas de lentes) del mismo signo, y siendo también la **d m** del mismo signo, puesto que siempre se desarrolla el espectro del mismo modo para todas las substancias, no será posible ver satisfecha aquella condición si en el sistema se tienen todas las lentes positivas ó todas negativas; se necesitarán entonces unas y otras.

Lentes acromáticas.

64. Apliquemos al caso práctico de un sistema de dos lentes en contacto (ya que acabamos de estudiar el problema bajo el punto de vista general), las anteriores fórmulas:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$$

y consideremos el punto luminoso en el infinito.

$$a = \infty \qquad p = \alpha \ .$$

La segunda lente nos da:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$$

y tenenemos además $d = \alpha + b$
pero como por el contacto: $d = 0$; $b = -\alpha = -p$.
Sustituyendo este valor de **b** y despejando $\frac{1}{\beta}$,

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p};$$

β en este caso será la longitud focal principal del sistema formado por las dos lentes cuyas distancias focales principales son p y q.

La ecuación de condición para nulificar la aberración longitudinal de refrangibilidad en el caso de dos lentes en contacto será:

$$\frac{d\,m}{m-1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{d\,m'}{m'-1} \cdot \frac{1}{q} = 0$$

en la que suprimimos el factor $\frac{b^2}{a^2}$ que es igual á la unidad. Haciendo para abreviar:

$$\frac{d\,m}{m-1} = \zeta : \frac{d\,m'}{m'-1} = \zeta'$$

tendremos: $\zeta\,\rho + \zeta'\,p = 0$;
la cual combinada con

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

da:

$$p = \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta'}\,\beta \quad \text{y} \quad q = -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta}\,\beta$$

fórmulas sencillas cuya resolución da los valores de las longitudes focales de las dos lentes que combinadas forman *un sistema acromdtico.* Cuando se emplee en adelante la expresión, lente acromática, entenderemos que se trata de un sistema, por lo menos de dos lentes, acopladas según los preceptos expuestos.

Es evidente que para que β resulte positiva, es decir, que la lente sea convergente y dé imágenes reales, es necesario que la negativa tenga una distancia focal mayor que la positiva. Además, como la dispersión depende de las constantes ζ y ζ' se deberá hacer la lente negativa con el cristal de mayor poder dispersivo; esto es, se hará la lente positiva de crown y la negativa de flint.

Los constructores determinan los valores de **m**, **m'**, *d m* y *d m'* por medio de instrumentos apropiados, construyendo prismas de los cristales mismos que van á emplear en la fabricación de la lente acromatizada.

La ecuación genérica

$$\frac{1}{p} = \frac{m-1}{R} + \frac{m-1}{R'}$$

demuestra que se puede obtener una lente de longitud focal **p** con una infinita variedad de radios de curvatura para las superficies del cristal. Esta circunstancia se aprovecha para anular ó volver pequeñísima la aberración de figura.

La lente negativa da aberraciones de signo contrario á las dadas por la lente positiva, y se comprende cómo variando en cada una de las lentes la relación entre la longitud de los radios, se puede llegar si no á anular completamente la aberración de figura, si á reducirla á un mínimum bastante satisfactorio para la práctica. El problema de la construcción de lentes buenas, exentas de errores de refrangibilidad y de figura, es siempre uno de los más delicados y difíciles y en esto se funda lo elevado de su precio.

Una lente que satisfaga (hasta un grado proporcional á la aplicación á la cual se destine) á la eliminación de las dos especies de aberración, se llama: *lente aplanática.*

De la segunda de las ecuaciones (24) aplicándole las modificaciones correspondientes al caso de dos lentes en contacto, se deduce la ecuación:

$$\frac{q}{p} = -\frac{m-1}{m'-1} \cdot \frac{d\,m'}{d\,m}$$

El primer miembro es una cantidad constante porque es la relación entre las dos longitudes focales principales correspondientes; el segundo miembro contiene la relación entre **dm'** y **dm** que sabemos no es constante para todos los colores del espectro y por esa causa si posible es obtener la so-

breposición de los colores para un valor dado de $\frac{dm'}{dm}$, no se podrá pretender obtenerla para todos. Recordaremos lo dicho al hablar sobre el acromatismo de los prismas; que sólo combinando substancias que tengan la propiedad de que en ellas la relación $\frac{dm'}{dm}$ sea invariable, puede alcanzarse un perfecto acromatismo y como quiera que esas substancias no existen, el constructor cuida de combinar aquellas en las cuales dicha condición esté más próxima á realizarse, pero nunca se llegará á conseguir un perfecto acromatismo. A los constructores ha sido posible obtener que dos rayos paralelos entre sí y paralelos al eje de una lente, uno de ellos muy cercano al centro y el otro al borde y éste por consecuencia alcanzando la lente bajo un ángulo de incidencia igual á la semiabertura de la primera superficie esférica (cerca de 10°), se encuentren en el mismo punto del eje con un error inferior á $\frac{1}{100000}$ de la longitud focal principal (β) de la lente compuesta.

Más bien que acromatizar tales ó cuales colores elegidos teóricamente, se busca el combinarlos de modo que para el ojo se obtenga el mejor efecto.

Cálculos teóricos que no podemos exponer en esta obra, demuestran que para obtener la compensación más perfecta es necesario: 1º Adoptar para las cuatro superficies de las lentes radios de curvatura apropiados. 2º Disponer las lentes de manera que el crown esté del lado del objeto visado (exterior del anteojo). 3º Colocar la cara más convexa del crown enfrente de la cóncava del flint.

Del ojo humano.

65. Siendo la luz el principal fenómeno de la naturaleza utilizado en el arte de medir, el ojo, órgano por el cual percibimos este fenómeno, será sin duda el más importante instrumento medidor y digno por ello de minucioso examen.

No nos importa inquirir cómo llega á nosotros la sensación de la vista, pero podemos y debemos estudiarla hasta donde esta sensación es física.

El ojo funciona como una verdadera cámara fotográfica, en la cual á la superficie químicamente sensible, está sustituída una superficie biológicamente sensible. Con la última frase expresaremos aquella especial función del organismo animal, que, con el intermediario de la substancia nerviosa, traduce los fenómenos exteriores en sensaciones. Y si el mecanismo de esa traducción sale ó no del límite de la investigación humana, no está fuera de éste el estudio del acto en el cual tiene principio.

El aparato auditivo, por ejemplo, puede ser comparado á un verdadero instrumento musical, formado por cuerdas de substancias nerviosas que vibran al unísono de las vibraciones sonoras que excitan el tímpano; pero se ignora todavía cómo estas vibraciones se transforman en sensaciones musicales. Lo mismo pasa con el aparato visual.

Condiciones físicas del ojo.

66. El órgano de la vista es un globo alojado en una cavidad de forma piramidal llamada órbita y formada por las paredes reentrantes de los huesos frontal, etmoide, esfenoide, lacrimal, maxilar superior y malar.

El ojo contiene las partes transparentes siguientes: (figura 26).

1ª La córnea C.

2ª El humor acuoso en la cámara anterior del ojo B.

3ª El cristalino A.

4ª El cuerpo vítreo D.

Las tres últimas están contenidas en tres sistemas de envolturas que se cubren una á otra y son, partiendo de la exterior:

1º La cubierta sólida del ojo ó *sistema exterior* compues-

to de una parte posterior más grande, formada por la *esclerótica*, membrana blanca y opaca, y de una parte anterior, de menor extensión, constituída por la *córnea*, membrana cartilaginosa y transparente.

2º El *sistema de la uvea* que se compone de la *coroide* **q** (indicada por un trazo más fuerte), del *cuerpo ciliar* **p** y del *iris* **b**. Está cubierto por el sistema anterior y presenta solamente una abertura: la pupila.

3º El *sistema de la retina* **i** y de la zónula de Zinn **e**, que encierra directamente el humor vítreo y adhiere por su parte anterior al cristalino.

Se da el nombre *de eje del ojo* á una línea que pase por el centro de la córnea y por el del ojo entero, porque el ojo se presenta, aproximativamente al menos, como un cuerpo de revolución cuyo eje sería la citada línea. Se llama plano ecuatorial, al plano normal á este eje y que pasa por el mayor diámetro del globo del ojo.

La *esclerótica* determina la forma exterior del último, la cual difiere notablemente de la de una esfera; en su parte posterior es aplanada y en su ecuador un poco comprimida por la presión de los músculos rectos del ojo, arriba, abajo, á derecha é izquierda; mientras que está bombeada en los intervalos de estos puntos. Hácia adelante forma parte de la esclerótica *la córnea*, cuya curvatura es más fuerte y por la parte de atrás está perforada para dejar pasar el nervio óptico **d**; es más gruesa adelante y atrás que en el ecuador del ojo.

La *córnea* presenta en conjunto la forma de un vidrio de reloj muy bombeado. Su superficie anterior difiere muy poco de la de un elipsoide de revolución al rededor del eje mayor; la extremidad de este eje está en el medio de la córnea.

El sistema de la *uvea* se distingue por una capa de celdillas pigmentarias que tapizan su superficie interna y aun parecen repartidas en el espesor de los tejidos, de manera que

comunican al todo una coloración obscura. Se llama *iris* la parte **abba** que se encuentra adelante y dentro del punto anterior de adherencia de la *uvea* con la esclerótica inmediatamente detrás de la córnea y es un verdadero músculo circular que forma un diafragma móvil. La parte posterior que reviste la superficie interna de la esclerótica se llama, como ya dijimos, la *coroide.*

Un haz de nervios viene de los lóbulos ópticos del cerebro, atraviesa la parte posterior de estas envolturas y se extiende en el fondo del ojo en una tercera membrana, la *retina*, sobre la cual se hace la impresión y que transmite la sensación.

En su parte anterior la coroide sostiene, por medio de una corona de fibras, una lente biconvexa que es *el cristalino*; de más curvatura en su cara posterior que en la anterior, transparente é incolora y contenida en una membrana transparente (cápsula del cristalino). La substancia del cristalino es en las capas exteriores de consistencia gelatinosa, mayor en el centro ó núcleo. Su índice de refracción varía de 1,337 á 1,399. Según Krause, su superficie anterior pertenece á un elipsoide de revolución aplanado y la posterior á un paraboloide de revolución (1).

El cristalino divide el ojo en dos cavidades llenadas por medios diferentes; la cámara anterior por el humor acuoso que es agua casi pura (2) y tiene por índice 1,337 y la posterior por el humor vítreo de índice 1,339.

67. Las curvaturas de las lentes de nuestros instrumentos ópticos son esféricas. No sucede lo mismo con las partes del ojo. Dijimos ya que la córnea tiene mayor curvatura en su centro y menor alejándose de este punto, y el cristalino por su parte está limitado por superficies de revolución que no son esféricas.

(1) Según Chossat las superficies del cristalino son partes de elipsoides.
(2) Agua con 2 por 100 de materias sólidas.

La naturaleza ha aprovechado en el aparato visual todas las leyes que hemos recordado anteriormente y para obtener mejor su objeto de eliminar los defectos debidos á las diversas aberraciones de refrangibilidad y de forma, se vale además del artificio de emplear diversas substancias y del de hacer la lente principal del sistema, el cristalino, de diversa densidad en su centro y sus bordes. El ojo forma así un verdadero sistema aplanático de lentes reunidas, capaz de producir una imagen real de los objetos colocados delante de él aun cuando, no obstante lo dicho arriba, no está completamente exento el cristalino de aberraciones de esfericidad, como lo comprueba el hecho de que cuando los objetos se aproximan al ojo más acá de cierta distancia límite, la imagen no se forma ya sobre la retina, sino atrás de ella; pero si se interpone una tarjeta con un pequeño taladro, de manera que sólo pasen los rayos centrales, la vista se hace distinta: el centro del ojo es, pues, más convergente que los bordes; es la conclusión deducida de la experiencia anterior. (1)

La pupila es el diafragma del ojo; está dotada de un movimiento reflejo que la agranda en la obscuridad y la estrecha en la luz fuerte, pero este movimiento es lento como es fácil demostrar.

68. Existe también para el ojo un centro óptico, ó mejor dicho, dos puntos nodales que por estar tan inmediatos entre sí, pues quedan situados en el interior del cristalino y cerca de su cara posterior (2) los supondremos confundiéndose en

(1) Según Helmholtz se tiene por término medio:

Radio de curvatura de la córnea	7^{mm}	8
„ „ anterior del cristalino	9	51
„ „ posterior	5	87
Espesor del cristalino	4	00

Los puntos nodales están el 1º á $0^{mm}.734$ y el 2º á $0^{mm}.337$ delante de la curvatura posterior del cristalino: su distancia es solamente de 0m.397.

(2) El foco interior del ojo está á $14^{mm}.431$ atrás de la curvatura posterior del cristalino.

un solo punto que llamaremos el centro óptico del ojo y el que, para fijar las ideas, supondremos en el medio del espesor del cristalino.

Esta hipótesis equivale á suponer que sustituimos todo el sistema del ojo con una lente única situada en O (fig. 27), cuyo espesor también se considera nulo. Si en dicha figura M m es un objeto, será N n su imagen, la cual resultará naturalmente invertida, y entre las dos longitudes M m y N n habrá la misma relación que entre las M O y O N.

No es este lugar á propósito para ocuparse de cómo llega al cerebro la idea del objeto en su posición natural, cuando la retina recibe una imagen invertida de aquél, y por interesante que sea el estudio de las aberraciones de esfericidad y refrangibilidad, del campo de visión, etc., no puede encontrar, dentro de los límites que nos hemos asignado, el desarrollo que merece y nos concretaremos á recordar aquellos principios de la óptica fisiológica, que hallarán su aplicación en el examen de los que sirven de base á los instrumentos ópticos de medida.

Visión distinta.

69. Para que una excitación luminosa sobre la retina llegue al cerebro, es necesario que posea una cierta *intensidad;* esto es, que sea suficientemente enérgica para propagarse hasta el cerebro; pero la excitación no debe ser tan enérgica que llegue al cerebro como sensación molesta ó dolorosa. Esta limitación es común á todos nuestros sentidos.

La más pequeña sensación perceptible á la vista, es la de una intensidad luminosa de $\frac{1}{800}$ de la de la luna llena y es bien sabido que no puede mirarse sin molestia una luz viva; no ya la solar sino la producida por el arco voltaico, la de la lámpara Drummond, etc.

Si para la percepción se tiene un límite respecto á la intensidad, se tiene también otro bastante notable con respecto á la

diferencia entre dos sensaciones simultáneas, ó sobrepuestas, sucediéndose á breve intervalo.

Si colocamos una mano sobre una mesa y sobre aquella un peso de 1 kilógramo, y si después se agrega al primitivo peso otro de dos gramos y ambos se levantan y se reposa y levanta sucesivamente la mano, añadiendo cada vez pesos de 5 gramos, de 10 gramos, etc., se encontrará fácilmente que en tanto que el aumento no ascienda á un tercio próximamente del primer peso, ó sea 333 gramos, no llega la diferencia á ser notada.

Un hecho análogo se verifica en la percepción de las variaciones de la intensidad de la luz, para la cual se ha encontrado que la sensibilidad á estas diferencias se extingue al $\frac{1}{100}$ y aun al $\frac{1}{50}$. Por lo demás, esta relación no es constante y varía con el cambio de la intensidad inicial; creciendo esta última la fracción crece también.

Es más difícil apreciar las diferencias á medida que es mayor la intensidad de las sensaciones. Por ejemplo: un aumento de intensidad de 200 bujías en un arco voltaico de 1000, puede pasar desapercibido, mientras que no sucedería lo mismo en un aumento de 2 sobre una luz de 10 bujías.

70. Finalmente, hay un límite mínimo para el tiempo ó para el espacio, según el sentido que se considera para percibir dos sensasiones elementales separadas.

Puede bastar una pequeñísima excitación sobre la retina para tener la impresión de punto luminoso, por ejemplo la producida por una pequeña estrella; pero para que dos, igualmente intensas, se puedan distinguir separadamente, es preciso que los puntos excitados de la retina (lugar de las imágenes) estén á una cierta distancia uno del otro. Sobre esto insistiremos más tarde.

Lo dicho hasta aquí basta para dejar entrever el género de consideraciones que ocurrirá hacer y su importancia en el estudio del ojo, considerado como el primero y más importante auxiliar del ingeniero, y para persuadirnos de que sean cua-

les fueren los fenómenos psicológicos que concurren en el acto de ver, lo cierto es que tienen su origen en la imagen que se pinta sobre el fondo de la retina; de donde se infiere que en la calidad intrínseca de ésta, y dado un perfecto estado fisiológico del sistema nervioso del individuo, reside la perfección mayor ó menor de la idea que del hecho material nos formemos.

71. Cuando (en relación con la persona que mira) la visión es lo más perfecta posible, se dice que tiene lugar la *visión distinta*, y la visión es distinta, cuando la imagen es bien definida sobre la retina y suficientemente clara, ocupa un espacio suficiente y dura inmóvil por un tiempo dado. Estudiaremos sucesivamente cada una de estas condiciones.

72. El ojo, considerado como un sistema óptico capaz de producir las imágenes de los objetos que están delante de él, participa de todas las propiedades de un sistema de lentes.

Siendo constante la posición de la retina respecto al cristalino, se podría concluir á primera vista que la visión no puede ser perfecta sino para una distancia constante del objeto observado al ojo mismo, pero hay que recordar ante todo, la propiedad de las lentes que hemos citado, referente á la rapidísima convergencia del valor de a hacia **p**. Si á aquella consideración añadimos ahora que el valor de **p** en el caso del ojo humano es muy pequeño, se comprende desde luego que tiene que ser relativamente pequeña la distancia á la que debe encontrarse el objeto para que su conjugada se confunda con la longitud focal principal.

De hecho el que posee un ojo sano, normal, ve bastante bien á un metro como á mil, y como á la distancia infinita á que se encuentran las estrellas. Para las grandes distancias no parece sea necesario indagar más allá, para darse cuenta del hecho de una perfecta visibilidad.

Para las distancias pequeñas, hasta 20 centímetros más ó menos, la cuestión es diferente. Las variaciones de a se hacen, ó al menos deben hacerse, sensibles; pero si se verifica

diferencia entre dos sensaciones simultáneas, ó sobrepuestas, sucediéndose á breve intervalo.

Si colocamos una mano sobre una mesa y sobre aquella un peso de 1 kilógramo, y si después se agrega al primitivo peso otro de dos gramos y ambos se levantan y se reposa y levanta sucesivamente la mano, añadiendo cada vez pesos de 5 gramos, de 10 gramos, etc., se encontrará fácilmente que en tanto que el aumento no ascienda á un tercio próximamente del primer peso, ó sea 333 gramos, no llega la diferencia á ser notada.

Un hecho análogo se verifica en la percepción de las variaciones de la intensidad de la luz, para la cual se ha encontrado que la sensibilidad á estas diferencias se extingue al $\frac{1}{100}$ y aun al $\frac{1}{50}$. Por lo demás, esta relación no es constante y varía con el cambio de la intensidad inicial; creciendo esta última la fracción crece también.

Es más difícil apreciar las diferencias á medida que es mayor la intensidad de las sensaciones. Por ejemplo: un aumento de intensidad de 200 bujías en un arco voltaico de 1000, puede pasar desapercibido, mientras que no sucedería lo mismo en un aumento de 2 sobre una luz de 10 bujías.

70. Finalmente, hay un límite mínimo para el tiempo ó para el espacio, según el sentido que se considera para percibir dos sensasiones elementales separadas.

Puede bastar una pequeñísima excitación sobre la retina para tener la impresión de punto luminoso, por ejemplo la producida por una pequeña estrella; pero para que dos, igualmente intensas, se puedan distinguir separadamente, es preciso que los puntos excitados de la retina (lugar de las imágenes) estén á una cierta distancia uno del otro. Sobre esto insistiremos más tarde.

Lo dicho hasta aquí basta para dejar entrever el género de consideraciones que ocurrirá hacer y su importancia en el estudio del ojo, considerado como el primero y más importante auxiliar del ingeniero, y para persuadirnos de que sean cua-

para otros, los límites de su acción están un tanto reducidos.

Los présbitas pertenecen más especialmente á la clase de los primeros. Para ellos la visión no tiene lugar sino á gran distancia. Para los miopes, el afocamiento obra á distancia bastante pequeña y con límites bastante restringidos. Ambos son anormales, sobre todo el segundo, en el cual se encuentra además de la deficiencia de la acomodación un verdadero defecto en el ojo, que tiene en ese caso una longitud focal demasiado corta.

Estas diferencias se corrigen en gran parte en ambos casos con el empleo de lentes apropiadas para disminuir ó aumentar la longitud focal del sistema que forman con el ojo.

Claridad.

73. La claridad de la visión depende: en primer lugar, de la intensidad propia de la luz que emana de los objetos; y en seguida de la cantidad que concurre á la formación de cada elemento superficial de la imagen sobre el fondo de la retina. Bajo este último punto de vista debemos estudiar la claridad.

Para formar la imagen de cada punto de la superficie de un objeto, ó por mejor decir, de cada elemento superficial, concurre un haz cónico de rayos que tiene por vértice el punto considerado y por base la abertura pupilar. A igualdad de intensidad en la luz la claridad debe depender de la abertura pupilar, y como ya dijimos, esta no es constante; se hace mayor en la obscuridad y disminuye á la luz.

La misma sensibilidad de la retina impone límites á la visibilidad con respecto á la claridad que no podemos modificar por acto de nuestra voluntad. Cuando las imágenes de los objetos sobre la retina, por estar excesivamente iluminados, son demasiado intensas, la pupila por sí sola se estrecha á fin de que la claridad se reduzca al grado conveniente.

El iris, pues, funciona por movimiento inconsciente, según ya se dijo, como un verdadero regulador. Puede, sin embargo, la intensidad de la luz ser tan grande que no obstante la facultad de estrechamiento de la pupila, la sensación sea dolorosa para la retina, ó viceversa, la luz que del objeto emana ser tan escasa, que no obstante la dilatación de la abertura pupilar no se reciba ninguna impresión sensible. Con respecto al ojo en sí, podemos disminuir la claridad, no aumentarla, puesto que no podemos agrandar á voluntad la abertura pupilar y sí es factible disminuirla mediante la interposición de un diafragma. Para un grado de iluminación determinado hay, pues, un estado de claridad independiente del individuo y que se llama claridad natural.

La ley de la variación de la magnitud de la imagen sobre la retina que es la misma varias veces citada y se expresa por la fórmula:

$$z = \frac{a}{a} \cdot Z;$$

esto es, que las dimensiones homólogas del objeto y de su imagen están en razón inversa de las respectivas distancias al centro óptico del sistema que la produce, nos explica un importantísimo fenómeno natural, expresado en la proposición siguiente: *la claridad es independiente de la distancia del objeto.* De la ley antes citada se sigue, que el área de un elemento superficial de imagen está en razón inversa del cuadrado de la distancia del elemento superficial de objeto que la produce; pero como por otra parte la intensidad de la luz disminuye en la misma proporción, se deduce en definitiva que la cantidad de energía luminosa sobre la retina por unidad de superficie es constante.

Abstracción hecha de la absorción de la luz producida por la atmósfera, el alejamiento de un objeto al ojo, no se advierte por ninguna pérdida de intensidad luminosa, por ninguna diminución de claridad.

Agudeza visual.

74. La magnitud de los objetos, la deducimos de la magnitud de sus imágenes sobre la retina, pero como esta última magnitud varía con el alejamiento de aquellos, no podemos formar un concepto absoluto sólo con este elemento, que por lo mismo se llama *magnitud aparente;* y si se quieren establecer comparaciones entre las dimensiones de varios objetos, preciso será mantenerlos á la misma distancia del ojo y á la misma que la unidad. Sin este requisito las magnitudes observadas no son absolutas, sino aparentes.

El tamaño aparente de la recta **Mm** se deducirá del ángulo que forman en el punto O, las rectas OM y Om igual al que subtiende la imagen Nn (fig. 27); esto es, que las magnitudes aparentes son entre sí como los ángulos visuales que ellas subtienden.

¿Hay un límite mínimo para la percepción de estos ángulos, esto es, de las magnitudes aparentes, más allá del cual la sensación, la idea de la magnitud cesa? Recordemos lo dicho poco ha para responder afirmativamente.

La capa posterior de la retina está formada por los últimos elementos del aparato nervioso visual que son sensibles á la luz. De la magnitud de esos elementos depende necesariamente el grado de exactitud que puede alcanzar la visión.

La luz que llega á un solo elemento sensible no puede provocar sino una sola sensación luminosa, en la que es imposible distinguir, si las diferentes partes de este elemento están diferentemente iluminadas. Se pueden percibir puntos luminosos cuya imagen retiniana sea mucha más pequeña que un elemento sensible de la retina, á condición de que la cantidad de luz que el ojo recibe de estos puntos sea bastante grande para afectar un elemento retiniano. Esto sucede con las estrellas fijas, por ejemplo, las cuales se perciben como objetos muy luminosos, á pesar de la infinita pequeñez de su magnitud aparente.

Del mismo modo pueden percibirse objetos obscuros sobre fondo claro aun cuando sus imágenes sean más pequeñas que un elemento sensible de la retina, siempre que la cantidad de luz que llega al elemento esté disminuída de una manera sensible por la imagen obscura que allí viene á formarse.

Si por ejemplo, con el alumbrado empleado, el ojo es capaz de reconocer diferencias de $\frac{1}{50}$ en la intensidad de la luz, una imagen obscura cuya superficie sea de $\frac{1}{50}$ de la de un elemento sensible, podría aún ser percibida. La experiencia demuestra que un disco blanco dibujado sobre fondo negro ó viceversa, deja de percibirse cuando se encuentra á una distancia de 5,000 veces su diámetro, en cuyo caso el ángulo que subtiende es de unos 40″. Este es el límite de la *sensación elemental.*

Es evidente, por el contrario, que no puede reconocerse la presencia de dos puntos luminosos separados, sino cuando la distancia de sus imágenes es mayor que la anchura de un elemento retiniano. Si esta distancia fuese menor, las dos imágenes necesariamente caerían sobre un elemento ó sobre dos elementos contiguos. En el primer caso, las dos imágenes no provocarían sino una sensación única; en el segundo, los elementos excitados siendo contiguos, no podría distinguirse si se trata de dos puntos luminosos, ó de uno solo cuya imagen se pinta sobre la línea de contacto de los dos elementos. Solamente cuando la distancia de las dos imágenes luminosas, ó al menos la de sus centros, es superior á la anchura de un elemento sensible, las dos imágenes pueden formarse sobre dos elementos diferentes, separados uno de otro por un tercero que no recibe luz ó que recibe menos que cada uno de los otros dos.

Según Hooke (1) dos estrellas cuya distancia aparente es menos de 30″ aparecen como una sola, y de cien personas,

(1) Smith: Optiks über von Kaestner.

una apenas puede separar dos estrellas cuya distancia aparente es inferior á 60″. Otros observadores que han experimentado, no sobre estrellas, sino sobre rayas ó cuadrados blancos iluminados, han encontrado una menor agudeza para la visión. El mejor ojo examinado por Weber distinguió rayas blancas cuyos medios estaban separados 73″. Con un alumbrado intenso y en las condiciones más favorables Helmholtz llegó á 64″

Sobre la retina del ojo esquemático de Listney un ángulo visual

De 75″ corresponde á una distancia de.....	0mm00526
„ 63″	0 00464
„ 60″	0 00438

Según las medidas de Kollisker el diámetro de los conos (últimos elementos de la retina) en la mancha amarilla es 0mm.0054 lo que corresponde casi exactamente á los números anteriores.

Se ve que la estructura de un ojo bien constituído y afocado con exactitud, es suficiente para alcanzar en realidad el grado de precisión que hace posible la magnitud de los elementos nerviosos.

Sobre las partes laterales de la retina la facultad de distinguir es mucho menor que en la mancha amarilla y esta facultad disminuye rápidamente al alejarse del centro de la retina, según las diferentes direcciones.

El ángulo visual mínimo que el ojo puede apreciar, más allá del cual las dos visuales que componen el ángulo se confunden y dan una sensación única, es lo que se llama *sensibilidad de separación ó agudeza de la vista* y ha sido medido por diversos autores y siguiendo diferentes métodos, pero siempre con la claridad é iluminación mejores. Tob. Mayer y Weber han tomado por objeto líneas blancas paralelas; Wolkman hilos de araña sobre fondo claro; Helmholtz una red de hilos metálicos negros presentando vacíos iguales á los llenos y pro-

yectándose en el cielo. Mayer encontró 92″; Weber 90″6; Helmholtz 93″ y Bergman 75″. Wolkman halló 147″5 y Hooke como arriba dijimos, 60″.

Tomando el promedio de estos valores, exceptuando los dos últimos, encontramos: 87″6 y adoptamos en números redondos 90″ para la generalidad de individuos de vista normal. Reduciendo la abertura de la pupila á 1^{mm} por medio de un diafragma, Salmoiraghi obtuvo un valor de la agudeza de cerca de 120″, cuyo resultado fácilmente se comprende debía verificarse.

Estos datos son preciosos porque con su ayuda y sólo con ella, podremos formarnos *a priori* un criterio completo de la potencia de los instrumentos ópticos que vamos á estudiar.

75. Notemos desde ahora que de los dos elementos, la sensibilidad que llamamos *elemental* de la vista, cuyo límite se ha encontrado ser de 40″, y la sensibilidad para *separación* ó *agudeza* que fijamos en 90″, la última es la que más interesa al Ingeniero. El fenómeno de *visar*, como se llama al acto de fijar visuales, no es el sencillo de ver sino otro más complexo, consistente en notar una coincidencia de dos visuales, por sobreposición de dos imágenes sobre la retina.

El límite de esta observación será entonces el mismo de agudeza de la vista, esto es, de 90″.

76. Finalmente, como última circunstancia de las concurrentes á asegurar la visión distinta, se tiene la duración de las imágenes sobre la retina.

Resulta de la experiencia, que para que la sensación sea completa y perfectamente distinta, la imagen debe durar sobre la retina, cuando menos, un quinto de segundo de tiempo.

Visuales.

77. Expuestos con algún detalle los principios de la óptica geométrica, que más tarde aplicaremos, y examinado el órgano del sentido de la visión, por cuyo medio somos capaces

de apreciar las magnitudes y fijar las direcciones, operaciones una y otra que tienen un límite de precisión dependiente de la agudeza de la vista, cuyo valor ya establecimos; pasemos á examinar de cerca el segundo problema, el de la determinación de las direcciones, uno de aquellos que, como dijimos al principio, son fundamentales en el arte topográfico.

Antes del examen hecho de la potencia del ojo, era prematuro ocuparse de los medios que empleamos para las observaciones, supuesto que la base en que debe descansar el concepto que nos formemos de la mayor ó menor exactitud en una observación óptica, es la clase del instumento empleado, esto es, su potencia, y la aptitud del ojo para apreciar la última, pues fácilmente se comprende la inutilidad de conseguir que un instrumento dé magnitudes ó establezca coincidencias hasta un límite muy pequeño, si esa magnitud y esa coincidencia son tales que escapan á la facultad de observación del ojo mismo. Del conocimiento más perfecto del funcionamiento y constitución de este aparato, ha venido una modificación importantísima en la construcción de los instrumentos de medida, como tendremos ocasión de comprobarlo más adelante, y ha llegado á ocupar un lugar importante en la Topografía el axioma del ilustre Plana, que puede enunciarse diciendo: *antes de medir es preciso ver.* (Primo da misuare bisogna vedere.)

Todo lo expuesto en este capítulo ha sido concurrente á un solo fin: el de conocer con la exactitud necesaria el fenómeno de la propagación de la luz, ya sea en un medio homogéneo, ó bien atravesando otro ú otros, de las formas, materiales, dimensiones, etc., que se aplican en la práctica para dar al ojo una potencia, digamos así, que no tiene por sí solo.

78. Si se observa una señal, cada uno de sus puntos es el vértice de un cono de luz, cuya base es la pupila del ojo de quien la mira, y el cual, penetrando á los medios refringentes del ojo, se cambia en un nuevo cono, cuya base es la misma pupila, y su vértice el punto de la retina donde se dibuja

la imagen del perteneciente á la señal; los dos conos tienen un mismo eje, y á éste será al que llamemos rayo visual ó simplemente visual.

Una visual determinará entonces una dirección en el espacio, puesto que la marcha del rayo luminoso en un medio homogéneo es rigurosamente recta. Este es el principio en que se funda la determinación de una dirección, y del mismo se deduce que si un pequeño objeto se interpone entre otro y el ojo del observador, ocultará el visado siempre que esté colocado exactamente en la línea recta que los une, ó sea sobre el camino de la visual.

Fúndase en lo último el trazo de los alineamientos rectos, el empleo de las pínulas, retículas, etc., que se utilizan haciendo que éstas ó esas oculten el objeto visado, en cuyo momento fijan la dirección de la visual dirigida al objeto que ocultaron.

Observaciones á la simple vista.—Instrumentos de pínulas.

79. Si á la simple vista disponemos una serie de estacas en la línea de una visual, evidentemente hemos tomado á nuestro ojo por juez para resolver sobre la exactitud de la sobreposición de las imágenes retínicas de las varias señales, y como antes establecimos que no puede esperarse mayor precisión que la de 90″ para la apreciación de un ángulo á la simple vista, podrá resultar un error ó desviación de esta magnitud, en más ó menos, para un alineamiento recto hecho á la simple vista.

Para los levantamientos topográficos de muy pequeñas extensiones ó para completar los detalles de planos extensos levantados por métodos exactos, suele hacerse uso de instrumentos en los que se observan las direcciones á la simple vista. Entre los más usados están el Grafómetro, Pantómetro y la Escuadra de agrimensor. El primero consiste generalmente en un semicírculo graduado (fig. 28), en cuyo cen-

tro gira una alidada de pínulas E D y que tiene otra alidada fija F H dispuesta según el diámetro terminal del semicírculo. En otro lugar haremos la descripción completa de los grafómetros más usados, y por el momento sólo nos ocuparemos de la alidada que es el órgano de dicho instrumento destinado á determinar la dirección de los puntos que interesa observar; objeto lo último del presente capítulo.

80. La alidada de pínulas consiste en una regla metálica R (fig. 29), en cuyas extremidades se elevan dos montantes perpendiculares á la regla: D y E, perforados cada uno por una hendedura muy estrecha ú ocular y una ancha ú objetiva, colocadas una sobre otra, pero dispuestas en orden inverso, de tal manera que si la estrecha se encuentra en la parte superior del montante E, estará en la inferior de D. En el eje de cada hendedura ancha y sobre la prolongación de la angosta, se encuentra restirada una crin ó alambre; el observador coloca el ojo cerca de una de las líneas angostas, y visando sobre el objeto por la hendedura opuesta gira la alidada hasta que la crin ó alambre parezca cubrir el punto de mira. En este momento, según lo dicho en el párrafo anterior, la hendedura estrecha, la crin y el objeto visado estarán sobre una misma línea recta.

Este aparato tiene tres defectos: el primero es que la anchura de la hendedura y el espesor del hilo no son despreciables, y el punto de vista puede desviarse á derecha ó izquierda' de donde proviene un error de dirección en la visual; el segundo es que cuando se observan á la vez dos objetos desigualmente alejados, como son el hilo y el punto de mira, la vista no se acomoda convenientemente ni á una ni á otra de las distancias y el observador no distingue claramente los puntos que le interesa ver, y el tercero, que la estrechez de la pínula disminuye la claridad.

La alidada de pínulas debe satisfacer á las condiciones siguientes:

I. Los hilos deben estar en prolongación de las hendeduras oculares.

II. Los dos hilos deben estar en el mismo plano, y

III. El plano de apoyo de la alidada debe ser normal al visual ó plano de colimación de la alidada.

La primera condición es necesaria para la reciprocidad entre las funciones de las dos pínulas. La segunda es necesaria para fijar un plano, pues si no fuera satisfecha, moviendo el ojo hacia arriba y hacia abajo se determinarían muchas visuales diversas para un mismo punto, y la tercera condición es necesaria para que, siendo el plano de apoyo de la regla horizontal, el de visual resulte vertical, y los ángulos obtenidos, ya sea por la lectura de una graduación, ya por la construcción gráfica, trazando sobre una plancheta el borde de la regla, sean los de proyección de las direcciones observadas.

Es muy fácil comprender el modo de investigar si una alidada de pínulas satisface á las condiciones enumeradas y por lo mismo no expondremos el procedimiento aplicable. Baste observar que como de esta clase de instrumentos no se puede esperar mayor precisión que la obtenida por visuales á la simple vista, los constructores sin gran esfuerzo pueden satisfacerlas.

81 Una dirección determinada por medio de pínulas no podrá ser más exacta que lo permitido por la agudeza normal de la vista, de tal suerte, que los ángulos comprendidos entre dos direcciones pueden, en el caso más desfavorable, tener un error del doble de aquélla, ó sea de 180″ ó 3′. Esto en cuanto al provenido sólo de la agudeza de la vista, pero á él deben añadirse los errores producidos por las causas enumeradas en el párrafo 80 , y por lo mismo las pínulas sólo tienen aplicación en instrumentos para pequeños levantamientos de detalles ó para alineamientos que no requieran una gran precisión.

82. La escuadra de agrimensor consiste en un cilindro ó en una esfera hueca de metal (fig. 30), que tiene hendeduras

sobre las generatrices, dispuestas dos á dos según planos pasando por el eje respectivo y generalmente arregladas de modo que los planos se corten bajo ángulos de 45°, 90°, 135°, 180°, etc.

El cilindro tiene generalmente unos 0^m10 de diámetro y la esfera unos 15 centímetros. La primera forma es más usada, pero la segunda tiene sobre aquélla la ventaja de permitir el tomar visuales muy inclinadas con respecto al horizonte.

Con una ú otra el límite de precisión que puede alcanzarse en la determinación de una dirección, es el dicho para la alidada de pínulas. (1)

La rectificación de una escuadra consiste en averiguar si los ángulos que da como rectos y semi-rectos, realmente lo son. Para conocerlo se coloca la escuadra en estación, de modo que las hendeduras sean verticales, lo que se consigue visando por ellas un hilo á plomo; se visa un punto y se fija en él una estaca; se visa y coloca otra señal en la dirección que la escuadra da como perpendicular á la primera; se gira en seguida la escuadra sobre su eje, de modo que la pínula por la cual se observó primero se dirija al segundo punto. Entonces, si el ángulo de las pínulas es de 90° habremos sumado dos rectos, y un tercer punto que podemos fijar después de la rotación, el centro de estación y el primer punto, estarán en línea recta (fig. 31).

Observaciones con reflectores.

83. Estudiando las propiedades ópticas de los espejos, vimos que si giramos uno de éstos un ángulo α, habremos pro-

(1) Experimentos hechos por el profesor Stampfer, de Viena, han demostrado que el intervalo entre las pínulas no tiene influencia sensible sobre la precisión, siempre que no sea menor de 25 centímetros, y lo mismo puede decirse del diámetro del taladro ocular siempre que no tenga de diámetro más de un milímetro y de la anchura de la hendedura ocular siempre que no sea mayor de 7 diez milímetros. Igualmente se comprobó que los taladros circulares proporcionan más exactitud que las hendeduras y que, respecto del hilo objetivo, se obtiene el mejor resultado cuando su grueso es de 6 á 12 diezmilésimos de su distancia al ocular.—*Erede*, *Topografía*, *pág.* 22.

ducido un movimiento angular 2 α en la imagen de un punto reflejado.

Esta propiedad encuentra su aplicación en numerosos instrumentos, de los cuales examinaremos las alidadas de espejo y de prisma y las escuadras de reflexión; pero antes recordaremos una propiedad del ojo humano, que consiste en su facultad de recibir dos ó más sensaciones luminosas simultáneas sobre el mismo punto de la retina, es decir, que si por medio de algún artificio hacemos que al cono luminoso que viene de un punto al ojo, se sobreponga en todo ó en parte otro haz cónico emanado de otro punto luminoso, de modo que la luz llegue al ojo como si perteneciese á un cono único, la imagen de este segundo punto deberá caer necesariamente sobre la retina en el mismo punto que la imagen del primero.

La retina tendrá dos sensaciones distintas, es decir, que una de ellas no destruirá la otra, y el observador verá dos imágenes transparentes y sobrepuestas de los dos objetos.

Las visuales que van á los dos puntos luminosos están y se llaman sobrepuestas. Lo mismo podríamos decir para tres ó más puntos, pero naturalmente multiplicando las sensaciones nace la confusión.

Estos fenómenos de sobreposición de visuales se obtienen fácilmente por medio de los espejos y de los prismas. En efecto, sea S S (fig. 32) la intersección de un espejo con el plano de la figura y supongamos que presenta un pequeño taladro m, de tal suerte que un observador colocado en O delante del espejo vea directamente una señal que se encuentra en la dirección O m A, y el mismo observador, colocándose convenientemente, deje entrar por su pupila á la vez que el rayo de luz directo que viene de A, parte de la reflejada por el espejo. El observador entonces verá simultáneamente y en la misma dirección la luz de A y la que viene de una señal que se encuentra, por ejemplo, en B. Basta para que esto se verifique que la normal al espejo sea la bisectriz del ángulo

B m O. Girando el espejo al rededor de un eje normal al plano de la figura y que pase por el centro del taladro **m**, las imágenes de otros puntos vendrán, como la de B, á pasar sobre el punto A; pero mientras esté fijo el espejo será la imagen de B la proyectada sobre A. En otros términos: la posición de B está determinada por la de A y por la del espejo. Los dos puntos A y B están siempre bastante lejos del observador para suponer que el vértice **m** del ángulo A m B es el punto O.

En vez de un espejo puede usarse de un prisma, aprovechando el fenómeno ya explicado de la reflexión total.

84. Sea A B C (fig. 33) la sección de un prisma recto, la cual supondremos ser un triángulo isósceles rectángulo, é I F D la marcha de un rayo de luz. Suponiéndolo normal en H, penetrará al prisma sin desviación, y llegará á la hipotenusa bajo una incidencia de 45°, mayor por lo mismo que el ángulo límite para el vidrio, y sufrirá en F la reflexión total. En E encontrará un cateto normalmente y emergerá por lo mismo sin refractarse. El ángulo I F D, como es fácil ver, será

$$\varphi = 90°$$

Consideremos ahora un rayo K E que en vez de ser perpendicular á la cara de entrada forme con la normal un ángulo ε (fig. 34).

El rayo en ese caso se refractará en E, acercándose á la normal y formando con ella el ángulo β dado por la formula $m = \frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \beta}$; en seguida encontrará la hipotenusa bajo un ángulo $\gamma = 45° + \beta$ mayor que el ángulo límite, y por lo mismo se reflejará totalmente en L, formando al llegar á N un ángulo con la normal:

$$\beta' = \gamma - 45° = \beta$$

y al emerger formará con la normal un ángulo igual á ε, pues to que $\beta = \beta'$.

El ángulo comprendido entre K E y N O será:

$$\varphi' = 90° + 2\,\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Para el caso en que el rayo incidente se incline como en la fig. 35 fácilmente se encontrará:

$$\varphi_2 = 90° - 2\,\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Si en la fórmula (a) $\varepsilon = 45°$

$$\varphi' = 180°.$$

Esto es: que si el rayo incidente es paralelo á la hipotenusa, después de refractarse al salir, emerge en una dirección paralela á la de entrada, y paralela naturalmente á la hipotenusa. Aun cuando ε sea $> 45°$, φ tiene un valor real, de suerte que un rayo cualquiera de luz que pase á través del cateto de un prisma triangular isósceles y sufra una sola reflexión sobre la hipotenusa, saldrá por el otro cateto tan desviado como si no hubiera sufrido sino una reflexión simple sobre la cara de la hipotenusa (fig. 36).

Las imágenes serán acromatizadas por la compensación exacta de las dos refracciones, y un prisma de esta clase sustituirá á un espejo, aventajándolo, por la mayor cantidad de luz reflejada, y porque puede reflejar no sólo rayos paralelos á la hipotenusa, sino aun situados detrás de ella, cosa que es imposible con los espejos.

No es preciso que el ángulo C del prisma sea de 90°, puede tener otro valor y aún quedarán subsistentes las propiedades demostradas, siempre que el triángulo sea isósceles. Fácil es probarlo, pero como la forma generalmente empleada es la del isósceles rectángulo, no nos extenderemos más, dejando al lector hallar por sí solo la demostración general.

Aprovechando la propiedad de los prismas citados, de dar imágenes aun de objetos que se encuentran en el plano de la superficie reflectora, se construye una nueva alidada, llamada de prisma ó de reflexión, la cual está formada por una regla

A (fig. 37), sobre la que se halla montado un prisma rectangular isósceles con sus aristas **a**, **b** y **c**, perpendiculares al plano de la regla, y la cara hipotenusa **a b** paralela y poco distante del canto ó arista de la regla A. Una armadura de metal fija el prisma á la regla y cubre las partes de aquél, que son inútiles.

El ojo del observador se coloca cercano á la arista **a**, de modo que la pupila reciba luz á la vez del objeto que está frente á ella y del prisma. Por lo antes expuesto se comprende que los objetos que se encuentren muy cercanos al plano de la superficie reflectora aparecerán duplicados; esto es, que el observador verá á la vez el objeto y su imagen, y la amplitud aparente de la separación irá decreciendo hasta ser nula en el caso de que la prolongación del plano reflector pase por el objeto, en cuya posición no habrá sino una sensación única, y la alidada estará exactamente en la dirección del objeto visado.

Un principio que ya conocemos nos hace comprender que una desviación en la dirección de la alidada reflectora producirá un desalojamiento doble entre el objeto y su imagen, y de aquí la primera ventaja de este género de aparatos sobre las pínulas, puesto que el error debido á la agudeza de la vista se reduce con el empleo de las reflectoras de 90″ á su mitad 45″.

Otra ventaja que presentan las últimas alidadas consiste en que el ojo está en las mejores condiciones de claridad y acomodación, porque no hay hendeduras estrechas que dañen la primera, ni distancias desiguales que dificulten la segunda. Así pues, para los pequeños instrumentos que no exigen telescopio, el empleo de los prismas es más ventajoso que el de las pínulas.

La rectificación de una alidada de prisma consiste en examinar si su plano visual ó plano de la hipotenusa es vertical, lo cual se consigue por la observación de un hilo á plomo que

se hace coincidir con su imagen reflejada, en toda su longitud.

85. Otra importante aplicación del prisma descrito es el hacerlo servir para los mismos fines que la escuadra de agrimensor, esto es, al trazado de ángulos rectos y semi-rectos.

Estudiemos este nuevo empleo del prisma, y para ello sea A B C la sección recta hecha en un prisma por el plano del dibujo (fig. 38), y consideremos un rayo situado en el mismo plano, y que llegue de un punto muy lejano P, al Q de uno de los catetos. Supongamos que aquí se refracta, que llega á R y se refleja totalmente, y en S se refleja en parte hacia T, y aquí emerge y en parte emerge en S refractándose naturalmente. Estudiemos la relación de posición entre el rayo incidente P Q y el emergente T U.

Demos á los ángulos las notaciones que expresa la figura, y entonces tendremos:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{\text{sen}\ \varepsilon}{m};$$

pero antes de seguir investiguemos cuáles son los límites dentro de los cuales se verifica el fenómeno descrito, en las circunstancias particulares de la figura.

Desde luego vemos que para tener dos reflexiones es preciso que

$$C\,R < C\,B\,;$$

luego si trazamos por B la B D paralela á R Q y por D la D P′ paralela á Q P, D P′ será el rayo límite del haz luminoso para el cual tiene lugar la doble reflexión. (1)

Como ε tiene un máximum (para el caso que consideramos) de 41° 48′ y $m > 1.00$; $\beta < 41°\ 48'$ y como

$$\gamma = 90° - \beta$$

será $\gamma > 41°\ 48'$ y en R la reflexión *siempre será total.*

(1) Dijimos que el punto luminoso está muy lejano del prisma.

Tenemos, como es fácil ver:

$$r' = \gamma - 45^\circ$$

y por lo tanto $$r' = 45^\circ - \beta$$

Para que en S haya reflexión total se necesita que $\beta \leq 3^\circ\ 12'$

Supongamos como caso más geneaal que una parte de luz se refracte en S, y sólo otra se refleje: la parte reflejada forma eu T un ángulo:

$$\beta = 45^\circ - r'$$

y poniendo por r' su valor

$$r' = 45^\circ - \beta$$

se halla

$$\beta' = \beta$$

y por lo mismo:

$$\varepsilon' = \varepsilon$$

El ángulo φ será, según se puede deducir de la figura

$$\varphi = 90^\circ + \varepsilon - \varepsilon',$$

$$\varphi = 90^\circ$$

Este valor de φ es independiente del de incidencia ε y de **m**.

Si en P suponemos una señal, el ojo del observador colocado cerca de T recibirá luz del espacio que queda al frente y del prisma y verá en la dirección U T la imagen de P. Colocando en P'' otra señal sobre la que se proyecte la imagen de P, quedará trazado sobre el terreno nn ángulo recto, cuyo vértice es la vertical del punto O: el prisma hace, pues, el oficio de escuadra, por lo cual también se llama á este instrumento: prisma–escuadra.

Dijimos que siendo r' menor de $41^\circ\ 48'$ una parte de la luz

se refracta en S; esto se evita plateando la cara hipotenusa del prisma.

Esta escuadra presenta las ventajas que expusimos antes, tales como claridad, precisión, etc., mayores que en las pínulas, y debe observarse que la imagen reflejada aparece inmóvil no sólo cuando se mueve involuntariamente la mano, sino también para sensibles rotaciones del prisma, pues vimos que el ángulo de desviación es independiente de ε.

86. También se usa otro prisma-escuadra, el de Wollaston, que tiene un ángulo recto, uno de 135° y dos de 67° 30′ (fig. 39).

Éste presenta sobre el anterior la ventaja de que la reflexión sobre las caras A D y D C siempre es total y no se necesita platearlas, apareciendo siempre muy brillantes las imágenes. La figura hace comprender la marcha de los rayos luminosos y el valor del ángulo φ, que es de 90°.

87. El profesor Bauernfeind, de Mónaco, ha ideado un prisma que resuelve fácilmente dos problemas que constantemente se presentan en la práctica en el levantamiento de detalles: y consisten ó en determinar un punto sobre un alineamiento fijado por dos señales para levantar en él una perpendicular cuyo extremo se señala; ó bien, dado este último punto, en colocarse en otro que esté sobre un alineamiento dado, y sea el vértice del ángulo recto formado por el alineamiento y la recta que va al primer punto fijado.

La sección recta del prisma es la que indica la fig. 40.

Los ángulos A, B y E son rectos; los D y C cada uno de 135°.

Consideremos un rayo de luz que viniendo de un punto lejano P, encuentre la cara B C en Q, bajo un ángulo de incidencia ε, se refracte y siga el camino Q R S T U formando á la salida el ángulo ε' cuya igualdad con el ángulo ε es fácil demostrar. De este modo el ángulo entre los rayos, incidente P Q y emergente T U será recto.

Simultáneamente el mismo prisma producirá sobre un ra-

yo de luz que venga de otro punto lejano P′ desviaciones que seguirán la marcha P′ Q′ R′ S′ T′ U′ y el ángulo de desviación será igualmente recto.

Un observador cuyo ojo esté colocado á inmediaciones de T T′, verá pues dos imágenes de P y P′ en π y π' proyectadas, como antes demostramos, en direcciones independientes del ángulo de incidencia y por tanto inmóviles, aun cuando giremos el prisma alrededor de una línea paralela á sus aristas.

Es evidente que si el observador se transporta perpendicularmente á la dirección determinada por dos señales P y P′, verá acercarse ó alejarse las imágenes, según que se aproxime ó aleje de la recta que une aquellas y si se coloca sobre la recta las imágenes se sobrepondrán, descubriéndose así el punto que se busca sobre un alineamiento; pero más aún, como la dirección en la cual se ven proyectadas las imágenes es normal á la recta P P′, el observador mirando á la vez que éstas, por arriba ó abajo del prisma, puede determinar un tercer punto sobre la perpendicular al alineamiento en el punto de estación.

Como se ve, este prisma resuelve el problema que indicamos al principiar su descripción y es de una aplicación tanto más fácil cuanto que por sus pequeñas dimensiones y peso no constituye molestia alguna para usarlo en el campo constantemente.

Para mejorar las condiciones de claridad en el alineador y escuadra de Bauernfeind se platea en sus dos terceras partes de A hacia E la cara A E′ y completamente la D C. La montadura del prisma, de la que más adelante hablaremos, cubre las partes que no tienen aplicación ó dañan al funcionamiento del prisma.

Una modificación consiste en hacer el ángulo en E del prisma tantas veces citado, de 67° 30′ y el ángulo D de 157° 30′ dejando á los otros los mismos valores, lo cual permite trazar también ángulos de 45°; pero siendo éstos de poco uso rela-

tivamente al constante de los de 90°, sólo indicamos su construcción para completar este estudio.

Porro también ideó un ingenioso prisma alineador, pero basta con lo dicho ya sobre esta materia para que al encontrarse con un instrumento reflector cualquiera, se comprenda desde luego su aplicación y modo de funcionar.

88. Las figuras 41, 42, 43 y 44, representan varios prismas ya montados y de tamaño natural. El examen de ellas bastará para hacerse cargo de las condiciones que se exigen en las dichas montaduras.

Se trata de hacer muy portátil el instrumento, de aprovechar los rayos luminosos útiles y eliminar los perjudiciales, dejando cubiertas ciertas partes y presentando otras á la acción de la luz.

En rigor sería bastante que la altura de un prisma fuese igual al diámetro máximo de la pupila, tanto más cuanto que en general sólo una mitad de ésta es la que se emplea cuando hay que vér á un tiempo en el prisma y directamente una señal, pero se le da más altura para hacer la pieza estable por su mayor peso y asegurarle mayor resistencia. En cuanto al desarrollo de las caras bastaría que el ancho del haz de luz emergente en el plano de la sección recta del prisma, tuviese una dimensión igual al máximo diámetro de la pupila; pero tanto por las consideraciones expuestas en el párrafo anterior cuanto por la mayor facilidad de construcción se exceden las dimensiones reales de las teóricas.

Es muy importante hacer observar, antes de concluir, que es indispensable que todos los ángulos de un prisma sean exactamente determinados, pues nos es bien conocido el error que resulta por la falta de precisión en aquellos. La dificultad de construirlos rigurosamente hace estos pequeños instrumentos relativamente caros.

Observaciones con telescopio.

89. Vamos ahora á ocuparnos del primero y más importante de los instrumentos empleados para fijar direcciones; del telescopio: de ese poderoso medio que ha dado á los instrumentos topográficos la facultad de contar, digamos así, con un ojo que guíe con un acierto tantas veces mayor, cuantas lo sea el aumento ó poder amplificador de aquel admirable aparato óptico.

Vimos que si se pone en presencia de un objeto lejano M N (fig. 45) una lente convergente, se produce una imagen de aquel **m n**, cuyas propiedades de magnitud y posición respecto de la lente son conocidas, dado que sea el valor de la longitud focal **p** de la lente. Conservando las mismas notaciones de los párrafos anteriores tendrémos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{Z}{z} = \frac{a}{\alpha}$$

Si en el lugar de la lente O se encontrase el ojo del observador, la magnitud aparente de una recta M N estaría geométricamente representada por el ángulo M O N, y (suponiendo como siempre M N muy pequeño en relación con **a**) si llamamos **g** la amplitud del ángulo visual tendremos:

$$g = \frac{Z}{a}$$

Si ahora suponemos el ojo más allá de **m n**, por ejemplo en **p** á una distancia de **m n** igual á la de la visión distinta y la que llamaremos **h**; siendo **g'** el ángulo **m p n** la imagen se verá bajo un ángulo

$$g' = \frac{z}{h}$$

De las tres últimas ecuaciones se obtiene:

$$g' = g \frac{a}{h} \text{ ..... } (1)$$

Si $a > h$, g' será $> g$, y si $a = h$, $g' = g$.

Si el objeto está tan lejano que podamos considerar $a = \infty$ a será igual á **p** y $g' = g \frac{p}{h}$

Este resultado nos enseña que con ayuda de una lente colocada delante del ojo y de distancia focal adecuada, podemos ver los objetos lejanos bajo ángulos aparentes diversos, mayores si así lo queremos, viendo en lugar de los objetos sus imágenes reales formadas por la lente misma.

La medida de este aumento que llamamos **A**, será la relación $\frac{g'}{g}$ esto es:

$$A = \frac{g'}{g} = \frac{p}{h} \text{ ..... } (2)$$

Ecuación igual á la primera de las del grupo (19) del párrafo 57, á las cuales acudiremos en lo sucesivo para los casos de sistemas más complexos.

Demostramos ya que en el caso de $a < p$, a es negativo y por tanto la imagen es *virtual*. Como se ve por la fig. 46, si el ojo del observador se coloca en el lugar de la lente, la magnitud aparente del objeto M N y la de la imagen M′ N′ son iguales, de donde:

$$g' = g = \frac{Z}{a};$$

pero para que el ojo colocado en O pueda ver el objeto M N es necesario que O B, ó sea a sea por lo menos igual á **h**, y aquí se presentan dos casos:

1º $a < p < h$ 2º $a < p \geqq h$

En el primer caso, la interposición de la lente tiene por efecto hacer visible el objeto que no lo era por su demasiada

proximidad al ojo (A O < h), y ahora estando su imagen virtual más alejada se halla en condiciones de visibilidad, aunque su diámetro aparente sea constante y el aumento $A = \frac{a}{a}$ puesto que $a = h$.

El caso de $a = h$ lo eliminaremos porque sólo puede verificarse para un vidrio plano en lugar de la lente. Si $a > h$ siendo siempre $a < p$ la lente no tendrá efecto alguno útil, sino al contrario, aleja más el objeto que se ve mejor sin la interposición de la lente. El segundo caso no tiene, pues, ninguna importancia; pero sí la tiene el primero, al mostrarnos que con el empleo de lentes de corta distancia focal podemos ver objetos muy pequeños á muy cortas distancias. La lente, por decirlo así, aumenta la facultad de afocamiento del ojo.

Si $$a = p < h,$$

es decir, si el objeto se encuentra en el plano focal principal de la lente, $a = \infty$ y los rayos de luz que la imagen envía serán paralelos al eje de la lente, en cuyo caso aquella será igualmente vista de todos aquellos individuos (y son los más) que ven bien los objetos lejanos.

La expresión del aumento

$$A = \frac{h}{a} \text{ será } A = \frac{h}{p}$$

Cuando digamos que la lente está dispuesta para visar al infinito ó para ver con rayos paralelos, expresaremos el hecho de que el objeto se encuentra en el plano focal principal de la lente. A las lentes empleadas en las condiciones que acabamos de establecer, se les da el nombre de lentes de aumento (loupes) ó microscopios simples. Porro les llama *lentes de afocamiento* (lenti d'accomodamento), nombre más propio, puesto que en realidad estas lentes simples no aumentan los ángulos aparentes, sino que los mantienen constantes, pero

permiten ver objetos situados á distancia inferior á la de la visión distinta.

90. Si en la ecuación (2): $A = \frac{p}{h}$ hacemos $h = 22$ centímetros, y queremos duplicar el ángulo visual, sería necesario que **p** fuese de 44 centímetros, y si queremos ese ángulo 5 veces mayor sería preciso qne **p** alcanzara un valor de 1^m10, lo cual, como se comprende, no sería práctico. Pero si se unen dos lentes, una para formar la imagen y otra de afocamiento, podremos hacer á **h** tan pequeño como se quiera, y reducir proporcionalmente á **p** evitándonos dar al anteojo dimensiones excesivas, ó bien permaneciendo **p** constante A puede ir aumentando al disminuir **h**.

La fig. 47 nos muestra la marcha de los rayos en el caso de dos lentes. Conservemos las mismas notaciones anteriores y observemos que la primera lente llamada objetivo da en **m n** una imagen real é invertida del objeto, y la segunda (llamada ocular) da otra **m′ n′**, que dista del ojo una cantidad igual á **h** En este caso $\beta = h$. El aumento será según la expresión ya conocida:

$$A = \frac{a}{b} \cdot \frac{\beta}{h} = \frac{a}{b}$$

Para el caso de más de dos lentes las fórmulas encontradas en dicha página nos darán el aumento recordando siempre que la última distancia conjugada es igual con **h**.

Recordando también las fórmulas para el caso de un objeto lejano en que $a = \infty$ y suponiendo que la imagen dada por la penúltima lente se forme en el foco de la última ú ocular para dos lentes tendremos para expresión del aumento del sistema:

$$A = \frac{p}{q}$$

segunda ecuación del grupo (22).

Admitiendo las convenciones hechas en los párrafos ante-

riores *el aumento es la relación entre las distancias focales del objetivo y del ocular*, y se hace independiente de lo que en realidad es una cantidad variable para cada observador, la distancia de la visión distinta: **h**.

Campo.

91. Otro elemento que es importante determinar en un anteojo es el campo, ó sea la extensión visible de la imagen de un objeto colocado delante del objetivo, y que queda limitada por las rectas M O y N O.

Hemos ya establecido una primera limitación del espacio visible, como la condición necesaria para establecer las proposiciones demostradas, las cuales, como se recordará, se fundaron en el supuesto de que los extremos del objeto visado no quedaban sino á muy pequeña distancia del eje de las lentes.

Si esta condición no estuviere satisfecha las imágenes se verían alteradas y poco distintas.

Cuando se emplean dos lentes, como es el caso en el telescopio, la amplitud del campo está limitada por el diámetro de la lente ocular.

De las ecuaciones (17') se puede deducir la amplitud del campo en un sistema óptico. El campo no es otra cosa que el doble del ángulo **C** de aquellas ecuaciones; pero en ellas se ha supuesto que el eje secundario que subtiende el ángulo **C** encuentra en su camino la segunda lente, luego la tercera, etc. Pero este hecho puede ser ó no realizado según el tamaño de las lentes, que se elije para satisfacer á otros fines. El diámetro de las lentes sucesivas de un sistema depende del radio de curvatura de las caras de aquellas y éste á su vez se relaciona con la distancia focal elegida para satisfacer al fin deseado.

En la práctica las lentes oculares tienen una abertura de 0.2 á 0.4 de su distancia focal.

Si en la figura anterior el rayo indefinido **M m** encuentra

la lente ocular en **m''**, o **m''** representa la semi-abertura de la lente ocular que (siendo **q** la longitud focal de esta última) llamaremos π **q**, π siendo un coeficiente, que como antes dijimos varía de 0.2 á 0.4 de **q**.

En el triángulo $O\ o\ m''$ tendremos:

$$C = \frac{\pi q}{p + q} \quad \text{y como } A = \frac{p}{q}$$

$$C = \frac{\pi}{A + 1}$$

cuya expresión nos dice que el *campo* en un anteojo depende del diámetro de las lentes y que (sobre todo para los aumentos notables) puede suponerse *inveresamente proporcional al poder amplificador.*

92. Es evidente que para ver de una sola vez todo el campo del anteojo es indispensable que el ojo del observador se encuentre á una distancia tal del ocular, que los haces de luz correspondientes á puntos extremos de la imagen puedan pasar por la pupila, lo que se verifica para el punto Ω de intersección de los ejes secundarios con el principal. La distancia o Ω, que llamaremos δ, es la conjugada de $(p + q)$ respecto á la lente ocular. Ω es el lugar del ojo.

Claridad en los anteojos.

93. Otro importante elemento de un anteojo es la *claridad*, ó sea el grado de iluminación de la imagen aumentada, el cual depende necesariamente de la cantidad de luz que concurre á la formación de la imagen de cada uno de sus puntos. Busquemos la relación entre la claridad natural que presentaría el objeto á la simple vista y la que presenta visto por medio de su imagen en el anteojo.

Dijimos ya que la claridad es constante aun cuando la distancia del objeto al ojo se varíe.

Ahora vamos á examinar la influencia eventual que el fe-

nómeno del aumento obtenido por medio de una lente, tiene sobre la claridad con que se ve el objeto amplificado. Sean en la figura 48, E A, E B, dos rayos extremos de luz emanados de un pequeño elemento superficial del objeto que suponemos bastante lejano de la lente para considerar dichos rayos como paralelos al eje.

La cantidad de luz que se propaga en el espacio cilíndrico E A E B concurre á formar en **e** la imagen de E. Un observador colocado en Ω á la distancia **h** de la visión distinta de **e** (suponiendo **h** < **p** para considerar el caso general en el que tiene lugar el aumento) verá amplificado el elemento superficial E como el cuadrado de $\frac{p}{h}$. En otros términos: la imagen sobre la retina del elemento superficial E, visto por medio de su imagen **e**, resultará más grande, más extensa que la imagen del elemento E, visto directamente; y si llamamos **w** el área de la parte de la retina sobre la cual se pinta la imagen de E, vista directamente, M^2 **w** será el área ocupada en la retina cuando se vea la imagen aumentada á través de la lente cuyo aumento sea M.

Sea **y** el diámetro de la pupila, é Y el de la lente.

En el caso de la visión distinta la luz que concurre á formar la imagen retínica de E es la que se propaga en el cilindro muy delgado que tiene por base la pupila misma. En el caso de la visión de la imagen **e** formada por la lente, dado que toda la luz que pasa por ésta penetre también en la pupila, será aquella que se propaga en el espacio cilíndrico que tiene por base la lente.

La cantidad de energía luminosa que en cada caso obra sobre la unidad superficial de retina, podrá ser representada respectivamente por:

$$\frac{y^2}{w} \quad \text{é} \quad \frac{Y^2}{M^2\, w}.$$

Si tomamos la claridad natural como unidad de medida de la claridad y llamamos C′ á la correspondiente al caso en que

se observe el objeto por medio de su imagen formada por la lente, tendremos:

$$\frac{y^2}{w} = 1; \quad \frac{Y^2}{M^2 w} = C' = \frac{Y^2}{M^2 y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Así pues, si toda la luz que viene de un elemento superficial del objeto y pasa por la lente llega á la pupila del observador, la claridad *es directamente proporcional al cuadrado del diámetro de la lente é inversamente proporcional al cuadrado del poder amplificador lineal.*

Veamos ahora qué circunstancias deben verificarse en el sistema óptico para que toda la luz que entra por la lente pueda ser utilizada.

En Ω, lugar del ojo, representemos con **a′ b′** (figura anterior) la abertura pupilar, entonces **a′ b′** = y, é Y = A B.

De la inspección de la figura resulta que la condición expuesta se verificará cuando los dos rayos **e f**, **e g** encuentren la recta **a′ b′**, á lo sumo pasando por sus extremidades, lo que equivale á poner:

$$M = \frac{p}{h} > \frac{Y}{y}; \text{ ó á lo más } M = \frac{p}{h} = \frac{Y}{y}$$

En el primer caso C′ < 1: en el segundo C′ = 1.

En el caso de la figura $\frac{p}{h} < \frac{Y}{y}$ y entonces los rayos extremos caen fuera de la abertura pupilar y toda la luz que queda en estas condiciones es perdida, y pasa lo que sucedería si la lente se redujera al diámetro A′ B′ = Y′, determinado por las rectas **a′ e**, **b′ e**, y nos encontraremos en el caso de C′ = 1 siendo $\frac{Y'}{y} = M'$

En conclusión, el máximum de claridad que puede obtenerse en un anteojo, abstracción hecha de la absorción del vidrio que forma las lentes, es la claridad natural C = 1, y ésta se obtiene cuando la relación entre el diámetro de la len-

te que forma la imagen y el de la abertura pupilar es igual al aumento.

Esto sucede cuando se observa la imagen á la simple vista; pero nada cambia con la interposición de la lente ocular, la cual permite al ojo acercarse á **e**, y reducir por lo mismo **h**, y el diámetro del haz cónico de luz que entra al ojo se hace siempre y proporcionalmente más pequeño, y va aumentando el exceso de la relación $\frac{p}{h}$ (que en este caso se hace $\frac{p}{q}$) sobre la relación constante $\frac{Y}{y}$, pero siempre quedando subsistente la ley de que la claridad es máxima para:

$$M = \frac{p}{q} = \frac{Y}{y}$$

Recordemos que **y** no es otra cosa que la medida del diámetro del haz cónico luminoso que de cada punto de la imagen alcanza el ocular, cuyo haz, en el caso de que la imagen caiga en el foco de ambas lentes, se transforma á la salida de la ocular en un haz cilíndrico; esto es, que **y** no es otra cosa que la cantidad y' de que hablamos en la página 77.

Hay que observar que en el caso más general $\frac{p}{q} > \frac{Y}{y}$ la claridad con que se ve la imagen será disminuída como si se redujese la pupila á un diámetro

$$y' = Y. \frac{q}{p} = \frac{Y}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

con lo que se obtiene la igualdad

$$\frac{p}{q} = \frac{Y}{y}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) el valor de $\frac{Y}{M}$ de la (3) tendremos:

$$C' = \frac{y'^2}{y^2}$$

La cual expresa una ley tan importante como sencilla: *la claridad de un anteojo es igual á la relación entre el área de la sección recta del haz ocular y el área de la abertura pupilar.* Comparando dos anteojos la claridad será proporcional al cuadrado del diámetro de la sección recta de los respectivos haces oculares; siempre, por supuesto, que éste no exceda del diámetro pupilar. La ley será cierta aun en este último caso, siempre que no se tenga en cuenta esa excedencia.

94. De la ecuación

$$y' = \frac{Y}{M}$$

se obtiene

$$M = \frac{Y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

la cual expresa que el aumento en un anteojo es igual á la relación entre el diámetro del objetivo y el del haz ocular. Si se conoce esta última medida serán conocidos el aumento y la claridad, de cuyos factores depende la potencia del anteojo.

El disco pequeño, que es la sección recta de dicho haz, es fácilmente visible, y en el punto del eje correspondiente al foco del ocular tiene su mayor brillo y su menor diámetro. Considerando que la distancia focal **q** es muy pequeña respecto de **p**, es admisible que los puntos todos del objetivo (que puede considerarse como un objeto luminoso) forman sus respectivas imágenes en el plano focal posterior del ocular, en el punto en que precisamente debe colocarse el ojo del observador y se forma el pequeño disco de que hablamos, visible fácilmente colocando el ojo á la distancia de la visión natural hacia atrás del ocular, y el cual se presenta desde luego como un circulito brillante, cuyo diámetro puede medirse haciendo caer la luz sobre un diafragma transparente que tenga pintada una división milimétrica. Para obtener el diámetro útil del objetivo se desalojan sobre el vidrio las puntas de un

compás hasta que ocupen sobre el anillo ocular las extremidades de un diámetro. La separación de las puntas del compás será entonces el valor de Y.

En la práctica, como más tarde veremos, no se emplean oculares de una sola lente, sino compuestos de varias. Las leyes demostradas sobre el aumento y la claridad subsisten sin embargo como puede comprenderse examinando las ecuaciones (23) de la página 80.

Líneas de colimación.

95. Hemos estudiado hasta aquí en los anteojos la propiedad de dar imágenes agrandadas de los objetos, y nos falta explicar cómo pueden los mismos aparatos servir para *fijar las direcciones*, que es, como recordaremos, el objeto á que este capítulo se ha consagrado.

Consideremos una lente montada en una de las extremidades de un tubo cilíndrico de longitud igual á la distancia focal principal de la lente y dirijámosla hacia un objeto lejano. Si en el opuesto extremo del tubo colocamos un disco de vidrio, se pintará sobre éste una imagen invertida de la señal visada y según ya sabemos un punto de la señal, el centro óptico de la lente y el punto de la imagen, conjugado de un punto del objeto, estarán colocados sobre una misma recta.

Si el tubo sufre un desalojamiento angular, la imagen se desalojará sobre el diafragma de vidrio y este movimiento se hará más perceptible colocando en dicho diafragma algunos puntos de referencia. De ordinario se emplean para este fin dos hilos ó rayas delgadas que se cortan como lo muestra la figura 49.

Así pues, el punto de cruzamiento de las rayas y el centro de la lente *fijan una dirección* que es la que pasa por el punto del objeto visado, cuya imagen se forma en el punto de encuentro de los hilos ó rayas. Esta recta ideal se llama *eje de colimación* ó *línea de fe del anteojo*, y debe notarse que es una

pura abstracción geométrica, pues en realidad todo un cono de luz viene de cada punto del objeto, encuentra la lente y se concentra después en el punto imagen del correspondiente del objeto.

En resumen: la fijación de las direcciones por la colimación se funda en la correspondencia entre el punto radiante y su imagen.

96. El poder amplificador perfecciona esta manera de determinar las direcciones, haciendo que un movimiento del tubo que para el ojo sería inadvertido sea acusado por un desalojamiento de la imagen, puesto que esta parecerá transportarse una cantidad tantas veces igual á la real cuantas unidades exprese el número M, y por lo mismo el instrumento será tanto más exacto para la determinación de las direcciones cuanto mayor sea su poder de aumento, por cuya causa no se reduce el anteojo al tubo con una lente y un diafragma que nos sirvió de ejemplo, sino que se perfecciona añadiendo un ocular, *cuyo objeto es visar la imagen real que produjo el objetivo* observándola en las condiciones de que tan detalladamente nos hemos ocupado. Lo anterior define perfectamente el objetivo y el ocular de un telescopio.

97. De todo lo dicho se deduce que si la precisión de una visual por lo que respecta á la agudeza normal de la vista es de:

$$90''$$

para el ojo desnudo, para el ojo auxiliado de un reflector (espejo ó prisma) es de:

$$\frac{90''}{2}$$

y para un anteojo que aumente M veces será de:

$$\frac{90''}{M}$$

Lo último podría hacernos creer que podemos aumentar

indefinidamente nuestra facultad de precisar direcciones, aumentando el valor de M; pero esto no es posible porque la claridad disminuye, cuando se emplea un anteojo, tanto por la absorción de la luz por el vidrio de las lentes, cuanto porque, como ya demostramos, la claridad es menor á medida que el aumento es mayor.

La experiencia ha comprobado que el valor $\frac{90''}{M}$ que llamaremos E, (error probable de una visual dirigida á través de un anteojo de aumento M) es de esa magnitud siempre que $y' >$ milíms. 1.25, pero que para $y' >$ milíms. 0.70 hasta $y' =$ milíms. 1.25 debe adoptarse:

$$E = \frac{120''}{M}$$

Si se trata de observación de estrellas, en cuyo caso como vimos en el párrafo 74 la agudeza de la vista es de 60″ tendremos según el valor de y' como en los dos casos anteriores para $y' > 1^{mm}.25$:

$$E = \frac{60''}{M} \; ; \qquad y \qquad E = \frac{80''}{M}$$

para $y' > 0^{mm}.70$ hasta $y' = 1^{mm}.25$.

Estas fórmulas y la $M = \frac{Y}{y'}$ nos dan los elementos necesarios para la construcción de un anteojo capaz de un grado de precisión fijado, no quedando indeterminada sino la longitud focal del objetivo cuyo diámetro es Y. Generalmente la longitud focal se hace de 10 á 12 veces el diámetro de la lente. (1)

(1) Según Goulier (Etudes théoriques et pratiques sur les levers topométriques) para

$p =$	50^{mm}	100^{mm}	200^{mm}	300^{mm}	500^{mm}
$\frac{p}{Y} =$	6.4	7.5	9.0	10.0	11.0

pero la fórmula de la que se deducen estos valores supone que se han adoptado para las 4 superficies de las lentes que forman el objetivo los radios de curvatura más ventajosos y que las lentes están muy bien centradas. Las cifras del texto son buenas en general (10 á 12 veces mayor p que Y).

Las ecuaciones $M = \frac{p}{q}$ ó $M = \frac{Y}{y'}$ nos prueban claramente que el aumento depende de una relación, uno de cuyos términos puede elegirse arbitrariamente.

La práctica, más que fórmulas teóricas, ha indicado los valores más convenientes para alcanzar el resultado apetecido: de tener anteojos claros, de potencia adecuada y exentos de aberraciones cromática y de figura.

Busquemos por ejemplo las condiciones de un anteojo apto para fijar direcciones con errores que no excedan de 10″ y tomemos $y' = 1.25$; entonces:

$$M = 9 \text{ veces} \qquad \text{é} \qquad Y = 11^{mm}.25.$$

La longitud focal se determina por la fórmula empírica:

$$p = K\,Y$$

en la cual:

$$K = 8 + 0.08\,(M - 10)$$

de donde, en este ejemplo:

$$p = 89 \text{ milímetros.}$$

98. Del mismo modo que fijando con un crucero de hilos un punto de la imagen hemos determinado la correspondiente dirección, podremos fijar otro, y las propiedades conocidas siendo comunes á los dos, es evidente que si conocemos la distancia z entre los dos puntos de la imagen y la longitud focal p de la lente, conoceremos el ángulo (véase párrafo 51) comprendido entre las dos direcciones que van á los puntos radiantes cuyas imágenes coinciden con los cruceros de los hilos. Este ángulo en partes del radio será:

$$\frac{z}{p}$$

y por su número de segundos

$$\frac{z}{p} . 206.265$$

lo cual es cierto en el supuesto de direcciones que formen muy pequeños ángulos con el eje de la lente.

Ya tendremos ocasión de aplicar más tarde este principio y entonces reconoceremos toda su importancia en la Topografía.

99. Hemos visto en las anteriores páginas en qué consiste esencialmente un anteojo; cuáles son los fenómenos ópticos que en él se verifican y hemos expuesto también el modo de medir sus principales elementos; tales como el poder amplificador, el campo y la claridad. Asimismo hemos explicado de qué manera se hace el anteojo un poderoso agente de mira y cómo es el tipo de los instrumentos destinados á fijar visuales y á medir los pequeños ángulos comprendidos entre éstas.

Ahora vamos á exponer las condiciones principales á que debe satisfacer la construcción material del instrumento para utilizar en él las enseñanzas deducidas de la teoría.

Los anteojos se pueden dividir en dos clases principales:

I. Anteojos de imagen real invertida ó astronómicos.

II. Anteojos de imagen en posición normal ó terrestres, que pueden ser de imagen real ó virtual.

Nos ocuparemos de los primeros que son los empleados generalmente en los instrumentos topográficos, y en cuanto á los segundos sólo tendremos ocasión de ocuparnos de los que producen una imagen real no invertida explicando la modificación que el ocular sufre para alcanzar este resultado. En cuanto á los anteojos terrestres que dan imágenes virtuales ó sean los llamados de "Galileo" por haber sido inventados por ese célebre físico, no tienen uso en los instrumentos topográficos, porque no dando una imagen real no es posible fijar direcciones con su ayuda; por lo tanto sólo hemos citado

esta variedad de anteojos para completar la clasificación de dichos instrumentos.

100. En un anteojo distinguiremos:

I. El objetivo.

II. La retícula.

III. El ocular.

Estudiaremos sucesivamente cada una de estas partes para los varios modelos de telescopios más en uso, explicando las modificaciones que los constructores han introducido para mejor satisfacer las condiciones del problema que están llamados á resolver; pero antes de estudiar las tres partes esenciales que separamos para su más fácil estudio, expongamos cómo está construído el armazón ó montadura que los liga. Esta se forma de varios cilindros metálicos que penetran unos dentro de otros, y soportan, como la figura 50 lo demuestra, en el extremo de mayor diámetro la lente objetiva; en el cilindro A dos diafragmas d y d' cuyos taladros centrales corresponden á la magnitud que al alcanzarlos tiene la sección del haz cónico luminoso y cuyo objeto es impedir que las reflexiones interiores del tubo perturben la visión. A este mismo fin los tubos están cubiertos interiormente de una pintura negra.

Un tubo B desliza dentro del A, manteniéndose apoyado en dos anillos a, a' y es movido por medio de una cremallera y un perno S, pudiendo así acercar ó alejar del objetivo el plano de la retícula que está colocado en un fuerte anillo p con objeto de que siempre resulte colocada en el plano donde se forma la imagen de los objetos exteriores. En d'' se encuentra otro diafragma que desempeña el mismo papel que los d y d' y en el extremo opuesto desliza otro cilindro corto que encierra el ocular y puede acercarse ó alejarse para distinguir con claridad los hilos de la retícula. Un pequeño taladro Ω indica el lugar donde debe colocarse el ojo.

101. Para usar el anteojo lo primero que debe hacerse es arreglar la distancia del ocular á los hilos para verlos clara-

mente. Para ello es necesario poner el ocular á cierta distancia de los mismos, distancia que depende de la vista del observador. Al hacer esta operación llamada *afocamiento del ocular* ó adaptación á la vista (adattamento alla vista) conviene no mirar algún objeto que atraiga la atención sino dirigir el anteojo al cielo ó á una pared cercana con el anteojo acortado como cuando se visa un objeto muy distante; de otra manera podría el ojo acomodarse á la distancia ó á la claridad de la imagen que atrajese su atención (1). Los hilos deben verse como rectas bien negras y netas; cuando en vez de verdaderos hilos se emplean rayas sobre vidrio suelen no presentarse bien distintas ó sólo se ven de este modo en ciertas condiciones de iluminación, en tal caso debe desecharse la retícula. Afocado el ocular se mueve el tornillo de afocamiento del objetivo hasta que la imagen real del objeto visado se forme en el plano de la retícula. Para saber si hemos dado á ésta la posición deseada tenemos dos criterios: la precisión de la imagen y la falta de paralaje.

Se llama paralaje de los hilos el desalojamiento que presentan respecto á la imagen, cuando se desaloja un poco el ojo. Si los hilos no se hallan en el plano de la imagen, sino un poco adelante ó un poco atrás de dicho plano, al desalojar el ojo se ve oblicuamente el intervalo entre la retícula y la imagen; esto es: la línea de la imagen que parecía cubierta por el hilo aparece á un lado de éste y la visual es incierta.

Lo mejor es seguir la regla de Vogler (2) suprimir primero la paralaje de los hilos sin cuidarse mucho de la precisión de la imagen y después desalojar el ocular hasta ver la imagen y los hilos bien claros. Esta segunda operación es el afocamiento del objetivo ó adaptación á la distancia.

Debe observarse que en general la distancia de la visión distinta para las líneas horizontales es menor que para las lí-

(1). Goulier. Etudes topométriques.
(2). Vogler C. A. Lehrbuch der praktischen Geometrie, p. 72.

neas verticales. Esta propiedad, llamada *astigmatismo*, es generalmente poco sensible; pero si lo es para algún observador, debe acomodar el telescopio á su vista considerando el hilo horizontal ó el vertical solamente, según el de ellos que tenga la mayor importancia para la operación que ejecuta (3).

102. En resumen: el observador debe hacer dos ajustes, y el constructor preparar dos movimientos: el del ocular respecto á los hilos y el de los hilos respecto del objetivo.

El primero se verifica como lo muestra la anterior figura, y el segundo en unos anteojos está dispuesto por desalojamiento del objetivo (fig. 51) y en otros por el de la retícula (fig. 50). En el ejemplo anterior representamos el segundo caso, pero el primero es más general en los teodolitos ingleses y americanos. La figura 51 representa en corte un anteojo de W. L. E. Gurley en el cual se desaloja el objetivo por medio del movimiento del piñón D.

De esta misma manera se afoca el objetivo en los instrumentos de Buff & Berger y en los de Keuffel y Esser; pero en los últimos debemos hacer notar la novedad de que el ocular no se afoca moviendo simplemente su tubo á frotamiento, sino que se ha adoptado el mecanismo que indica la figura 52 y que se comprende desde luego.

Es sumamente importante que el deslizamiento de un tubo respecto del otro, sea cual fuere el sistema adoptado, se haga siguiendo una recta coincidente con el eje óptico del objetivo ó al menos que le sea paralela. Para alcanzar este resultado los constructores han acudido á varios artificios; pero se comprende desde luego la dificultad práctica de resolución del problema, considerando que un simple frotamiento en los anillos como a a' de la figura 50, aun suponiendo que el eje del cilindro ocular coincida con el eje de la lente objetiva, no puede ser muy perfecto y de hecho esta disposición sólo se aplica en instrumentos de poco precio; si por el con-

(3). V. Baggi. Alcune considerazioni sulla livellazione topografica 1892.

trario la presión es fuerte, el movimiento se dificulta, y de uno y otro escollo nace una de las mayores dificultades materiales para la buena construcción de un anteojo. Véase también la disposición del deslizamiento en la figura 51.

La figura 53 representa la sección transversal de un telescopio en el que se ha adoptado una disposición que consiste en limitar el contacto del tubo con los anillos, á sólo dos arcos laterales *a b*, *a′ b′* en cuyo caso todos los diámetros, los del tubo y los de los anillos, se construyen perfectamente iguales y se agregan los muelles *s*, *s′*, para mantener la adherencia del tubo contra los arcos. Esta disposición es muy buena. Se aplica, además, algún medio para que el tubo móvil no gire sobre su eje de figura; generalmente el piñón y la cremallera impiden este movimiento.

En todo caso y dada la imposibilidad de asegurar la perfección en los movimientos inevitables para afocar, debe adoptarse un modo de observaciones repetidas en las condiciones adecuadas para eliminar los errores que provengan de esos mismos movimientos.

103. *Del objetivo.*—El objetivo siempre está formado de una lente aplanática compuesta cuando menos de otras dos, una biconvexa de Crown y otra generalmente plano-cóncava de Flint Glass y ambas deben estar perfectamente centradas y ser del mismo diámetro, de tal suerte que colocadas en su armadura, el centro óptico caiga exactamente sobre el eje del cilindro del tubo ó al menos diste muy poco de esta línea, la cual en todo caso debe ser paralela al eje de la lente. Excusado parece decir que el objetivo debe estar perfectamente trabajado para que produzca imágenes exentas en lo posible de defectos y para que sean verdaderas las fórmulas establecidas que se refieren á superficies regulares y lentes de uniforme composición en toda su masa.

El objetivo está siempre colocado con la lente convergente (de cara menos curva hacia el lado del objeto y más curva en el contrario) hacia el exterior, y la divergente (más curva al

lado del objeto y menos curva ó aun plana del lado opuesto) hacia el interior y ambas se adhieren por un mastique transparente cuando sus dimensiones son pequeñas (70^{mm} de diámetro máximum), práctica que trae la ventaja de impedir las pérdidas de luz por las reflexiones que tienen lugar al paso de una lente á otra, cuando las separa una capa de aire.

Buff & Berger, excelentes constructores americanos, usan un objetivo compuesto de dos lentes de cristal, "Jena" (empezando á fabricar en 1885) que tiene un índice de refracción y un poder dispersivo mayor que cualquier otro construído hasta ahora. Cuando no es muy grande el diámetro de las lentes están adheridas, lo cual, según estos fabricantes, aumenta la claridad en un 8 por ciento.

104. *De la retícula.*—Sobre uno de los diafragmas colocados en el interior del tubo del telescopio y que corresponde á la distancia focal del objetivo, se colocan dos ó más hilos que se cortan en uno ó varios puntos. El crucero central determina con el centro óptico de la lente, la dirección de la visual.

Los hilos deben ser finísimos para que con su intersección no oculten dimensiones notables de la imagen; su grueso no debe subtender un ángulo mayor que el que llamamos E para no cubrir un desalojamiento perceptible.

Si d es el diámetro de un hilo tendremos:

$$d = \frac{E}{206.265} p$$

tomando los números del párrafo 97 se obtiene para diámetro de los hilos:

$$d = 0^{mm}.0045$$

Los hilos de tela de araña son bastante sutiles para satisfacer esta condición, pero por su mayor opacidad y resistencia y por no ser higrométricos, se ha generalizado el uso de los hilos de platino que Salmoiraghi ha visto recientemente,

estirados por el sistema Wollaston, de un diámetro de $0^{mm}002$. Gurley asegura construir hilos de platino de un diámetro que varía entre $\frac{1}{8000}$ á $\frac{1}{12000}$ de pulgada inglesa ó sea $0^{mm}.008$ y $0^{mm}.002$, y de este metal los coloca en general en los instrumentos que fabrica.

Buff y Berger y Trougthon & Simms, por el contrario, han continuado usando hilos de araña, á menos que al pedir el instrumento se ordene otra cosa.

También se aplica al diafragma, en lugar de hilos, una lámina delgada de cristal sobre la que se han hecho incisiones rectas con diamante; en este caso pueden trazarse incisiones de $\frac{1}{1000}$ á $\frac{1}{2000}$ de milímetro de anchura.

105. Al fin de este tomo explicaremos la manera práctica de reponer una retícula cuando se rompe la del instrumento, pero desde luego observemos que como es casi imposible lograr que el cruzamiento de los hilos ocupe un lugar determinado del campo, se ha recurrido á disposiciones especiales para mover el diafragma que lleva la retícula, de las cuales entre las más usadas citaremos la que representa la figura 54 en dos secciones, una sobre el eje del anteojo y otra normal á la primera; esta última representando la retícula y su armadura tal como se ven del lado del objetivo. La placa *p* de los hilos tiene un apéndice tronco-cónico que desliza con un juego de uno á dos milímetros en el hueco de un anillo *a*, *a*, fijo al tubo ocular. Por efecto de la presión oblicua que los tornillos 1, 2, 3 y 4 ejercen sobre el cono, se aplica fuertemente la placa de la retícula sobre el anillo fijo y de este modo se mueve siempre sobre un mismo plano normal al eje del anteojo. Las roscas de los cuatro tornillos que atraviesan el anillo *a*, *a*, pasan después á través de otro anillo *a'*, *a'*, cortando antes el tubo ocular, que para dejarlos pasar tiene unos agujeros iguales (en el sentido del eje del anteojo) al diámetro de los tornillos y alargados en sentido normal al de esa línea, de tal suerte, que fijada ya la posición del centro de la retícula pueda, sin moverse este punto, hacerse sufrir al

conjunto una rotación pequeña alrededor del eje dicho; para colocar las hilos vertical ú horizontalmente, según el uso á que el instrumento se destine. Obtenida la posición deseada, se fija permanentemente el sistema por medio del tornillo V.

106. La figura 55 representa otra disposición más frecuente, aun cuando no tan buena como la anterior, y que es común en los instrumentos ingleses y americanos.

Como se ve, el anillo porta-retícula *p* está sostenido por cuatro tornillos que atraviesan el tubo ocular y un anillo exterior *a*, *a*. El tubo tiene los pequeños agujeros alargados de que hablamos en el párrafo anterior y que permiten un pequeño movimiento de rotación concéntrico al eje del tubo. El tornillo S fija el anillo firmemente. La figura 56 representa la armadura de la retícula de un Gurley.

Fácil es, al examinar un anteojo, conocer de cuál de los dos sistemas antes descritos se trata. En el primer caso las cabezas de los tornillos están separadas del anillo y en el segundo están apoyadas contra él puesto que en uno obran por presión y en otra por tracción.

107. Es importante observar que en uno ú otro caso la operación de desalojar la retícula debe hacerse con gran cuidado, pues se trata de pequeñísimos desalojamientos expresados por fracciones de milímetro. Nunca deben hacerse con los tornillos movimientos exagerados y deben detenerse al sentir resistencia, so pena de destruir las roscas ó deformar el diafragma porta-hilos.

En todo caso, *mejor que corregir un error por medios mecánicos, hay que seguir un método de observación que lo compense*, y este principio general y tan importante, á mi juicio, que no debe cesar de repetirse, es tanto más interesante cuanto que debemos estar persuadidos de que no es posible conseguir la corrección *absoluta* de un defecto de construcción y aun corregir *bien* requiere un esmero y una práctica que á pocos es dado alcanzar. Por el contrario, el sistema de las dobles ob-

servaciones (en el caso de que hablamos) permite obtener un resultado independiente del desalojamiento de la retícula, y está al alcance de cualquier mediano observador el obtener buenos resultados, lo cual no pasa cuando uno de estos intenta mover los ajustes de un instrumento, pues corre riesgo de dejarlos en peor estado que antes de tocarlos. Además, como en los transportes indispensables de un instrumento, sus diversas partes están expuestas á movimientos bruscos, vuelven á desalojarse los ajustes y preciso sería en cada caso empezar por rectificarlos, lo cual, no nos cansamos de repetirlo, se evita con un método adecuado de observación.

"En un instrumento es en general más importante la in-"mutabilidad de la posición relativa de sus partes que su po-"sición absoluta" (1).

Volviendo á la descripción de las varias montaduras de retículas, de la que nos apartó la anterior digresión, disculpable por la importancia general que tiene para el ingeniero lo que acabamos de decir, réstanos añadir que al segundo sistema descrito pertenecen las retículas ajustables para usarse como estadias, las cuales describimos en el capítulo sobre "Medida indirecta de las distancias" y son usadas por la mayor parte de los fabricantes ingleses y americanos. La ingeniosa disposición de Keuffel y Esser es la que allí daremos.

108. Por último, representamos en las figuras 57 y 58 la disposición aplicada en el Taquímetro Cleps de mayor tamaño y la cual, como se ve, consiste en una placa *p* que lleva la retícula y que va sólidamente fijada á un tubo *t* apéndice del tubo ocular T. Este último termina en un reborde plano en cuyo espesor se fijan cuatro tornillos 1, 2, 3 y 4 que sobresalen cosa de 2 milímetros del plano del reborde. El tubo *t* se apoya sobre el plano de éste mediante un reborde grueso.

Los tornillos *a*, *b*, *c*, *d*, aseguran el tubo menor contra el mayor y tienen algún juego. Aflojando éstos y moviendo los 1,

(1) Salmoiraghi, pág. 154. Geometría práctica.

2, 3 y 4 pueden darse pequeños desalojamientos al tubo *t* y por consiguiente á la placa de los hilos y cerrando después los primeros (*a*, *b*, *c*, *d*) se asegura fuertemente la posición de la retícula.

109. *Del ocular.*—Hemos estudiado sucesivamente los efectos de los anteojos sin ocular y después los de un telescopio con un ocular formado por una lente única; pero de una y otra especie ya no se construyen anteojos aplicables al arte topográfico.

Actualmente se reunen dos ó más lentes para formar el ocular, sea con el objeto de obtener un campo mayor y gozar de mayor aumento que el obtenido á igualdad de campo con una sola lente, sea, además, con el fin de obtener imágenes exentas en lo posible de aberraciones cromáticas y de figura. Efectivamente y por lo que respecta á esto último, debe notarse, que si bien un objetivo aplanático y bien construído da buenas imágenes, como éstas se observan después por medio del ocular, vuelven á sufrir alteraciones de forma ó de cromatismo.

La acción del ocular es sin embargo mucho menor que la del objetivo, sobre todo para aumentos pequeños, pero para los mayores, digamos para poderes amplificadores de veinte veces, los efectos de las aberraciones del ocular se hacen sensibles (1).

110. Con un ocular de dos lentes pueden disminuirse considerablemente estos defectos y mejorar por lo mismo el telescopio.

(1) Fraunhöfer aconseja para examinar la bondad de las lentes bajo el punto de vista de las aberraciones, el siguiente método: sobre un cartón blanco se dibujan en negro varias figuras regulares (cuadrados, círculos, triángulos, etc.) con dimensiones de 2 á 5 centímetros y se observan con el anteojo á una distancia proporcionada con el aumento. Si las figuras aparecen regulares, uniformemente negras, netas, es decir, de contornos precisos, sin más que una leve franja azulosa, el anteojo es bueno; mientras que si las lentes son defectuosas y el objetivo no es acromático, las figuras aparecen irregulares, esfumadas en los bordes y rodeadas de franjas de varios colores. (Erede. —op. cit. pág. 81.)

Con el ocular no se acromatiza en general en el verdadero sentido de la palabra, sino que se trata de que se dispongan las imágenes una detrás de otra y comprendidas bajo el mismo ángulo visual para que la roja oculte la amarilla, la amarilla la verde, etc., de manera que cubiertas todas se obtenga un efecto único resultante de la fusión de aquéllas y que es bastante en la práctica para proporcionar un instrumento bueno. Esta manera de corregir el acromatismo se llama corrección *por destrucción del contorno colorido* de la imagen.

Para comprenderlo mejor, supongamos un objetivo no acromatizado (figura 59); la imagen de una recta vertical será V V R R, real y dispersada. Si interponemos una lente C D antes del plano focal del objetivo, en P′ se concentrarán los rayos que debían encontrarse en P. Los que llegan á R harán su imagen en R′ y los violetas V en V′ sobre la línea C′ V. En resumen, en lugar de la imagen V V R R se tendrá la V′ V′ R′ R′ dispersada como la primera pero en condiciones diferentes en cuanto á que R′ R′ es menor de V′ V′ y que prolongadas las líneas V′ R′ encuentran al eje en C″. Si el ojo está en C″ verá las diversas imágenes de cada punto en la misma dirección, los colores sobrepuestos, y por lo mismo, la imagen incolora y neta. Si en C″ se coloca otra lente que agrande la imagen V′ V′ R′ R′ y la lleve á la distancia mínima de la visión distinta, esta imagen no habrá perdido su acromatismo. Este ocular de dos lentes se llama de Huyghens y también de Campani.

111. En general tiene la disposición que indica la figura 60, y como se ve está constituído por dos lentes plano convexas que presentan su cara curva hacia el objetivo. La lente A, cuyo papel es recoger los rayos extremos del campo, llámase por esto colectora, y la B lente del ojo. Este ocular compuesto, también tiene el nombre de *negativo* en atención á que formándose la imagen del objetivo entre las dos lentes A y B su distancia á la primera (según la convención sobre los signos) es negativa. La imagen real cae en medio del dia-

fragma p y si hubieran de colocarse hilos, en este lugar habría que disponerlos y debido á esta circunstancia, que se comprende es desfavorable, el ocular *negativo* no se emplea en los instrumentos geométricos pero sí es muy usado en los microscopios de los cuales debemos ocuparnos más adelante, y por esta razón ampliaremos el estudio de este ocular.

También la disposición de Huyghens es aplicada en los grandes telescopios usados en astronomía física con los cuales los objetos son visados sin hacerse medidas.

Este ocular da un campo de vista amplio aunque no enteramente plano y la iluminación es mayor que en cualquier otro ocular.

La introducción de la lente colectora y la combinación misma de las dos lentes modifican las fórmulas de los párrafos 90 y 91 que dan el aumento y el campo. Conservando las mismas notaciones anteriores y siendo la primera lente el objetivo cuya distancia focal llamamos p; q y r respectivamente las de las lentes A y B del ocular; d la separación de éstas dos últimas y recordando siempre que la imagen real y el plano de los hilos quedan en el plano focal de la lente B, encontraremos para la construcción de las lentes y para la composición del ocular, dado el aumento A y la distancia p previamente deducida con el razonamiento del párrafo 97:

$$-b = \frac{p}{A}; \quad q = \frac{2(A-1)}{A+1} \cdot \frac{p}{A} \quad r = \frac{2(A-1)}{3A-1} \cdot \frac{p}{A}$$

$$d = \beta + c = \frac{4(A-1)}{3A-1} \cdot \frac{p}{A}$$

y para el punto ocular (siendo δ su distancia á la lente):

$$\delta = \frac{A+1}{2A} \cdot r$$

y si puede considerarse A bastante grande (de 10 en adelante) para que pongamos:

$$A+1 = A = A-1 \qquad 3A-1 = 3A$$

tendremos:

$$q = 2\frac{p}{A}; \qquad r = \tfrac{1}{3}q; \qquad d = \tfrac{2}{3}q; \qquad \delta = \tfrac{1}{3}q$$

Y puesto que $\frac{p}{A}$ no es otra cosa que la longitud focal de la lente ocular única que daría con el objetivo de longitud focal p el aumento A, si ponemos $\frac{p}{A} = e$ tendremos:

$$b = -e; \quad q = 2e; \quad r = \tfrac{2}{3}e; \quad d = \tfrac{4}{3}e; \quad \delta = \tfrac{1}{3}e$$

ecuaciones que satisfarán á las condiciones de la destrucción del contorno colorido porque provienen de las ecuaciones del párrafo 58 supuestas subsistentes simultáneamente con esta:

$$\pi\beta + \pi' r = 0$$

en las que π y π' representan como en el párrafo 91 el coeficiente por el cual se debe multiplicar la longitud focal de las lentes q y r para tener su semi-apertura.

No podemos extendernos en mayores detalles que interesan particularmente al constructor. Las anteriores ecuaciones nos permiten comprender las relaciones entre las diversas distancias de las lentes, sus longitudes focales, etc. Observemos que el campo que vimos en el párrafo 91 era:

$$C = \frac{\pi}{A+1}$$

para el caso de una lente, en el de dos se hace:

$$C = \frac{2\pi}{A+1}$$

A igual aumento doble campo. El campo total si suponemos $\pi = 0.30$ será en minutos:

$$C = \frac{2212}{A+1}.$$

112. El célebre Ramsdem es el autor de un ocular compuesto de dos lentes plano–convexas que se presentan sus caras curvas. En éste la imagen dada por el objetivo cae fuera del ocular, lo cual trae la ventaja de independerlo de la retícula y del objetivo y le hace ser empleado casi universalmente en los instrumentos medidores (véase figura 50).

Santini da para la construcción del ocular de Ramsdem las siguientes fórmulas deducidas del estudio de buenos modelos:

$$q = r = \frac{9}{5} \cdot \frac{p}{A}; \quad d = 0.200\, q; \quad b = 0.44\, q; \quad \delta = 0.44\, q \quad (1)$$

Como se ve por las anteriores fórmulas (y es la práctica general), las dos lentes oculares son de la misma longitud focal y se colocan á una distancia de $\frac{1}{5}$ de la longitud citada según Santini. Salmoiraghi las separa al doble del número anterior y obtiene más campo y menor coloración del contorno de la imagen.

El ocular de Ramsdem casi está exento de aberración de esfericidad y da un campo de vista perfectamente plano, pero no está enteramente libre de aberración cromática. Es por esto último, que suele preferírsele el ocular ortoscópico de Kellner ó el de Steinheil en los que esta última aberración está sensiblemente eliminada.

113. El ocular ortoscópico de Kellner se compone de dos lentes. La inmediata al ojo es una lente compuesta de otras dos, una de crown y otra de flint que se acromatizan como las de un objetivo. En su forma común la lente del ojo es plano–convexa con el lado plano hacia el ojo y la lente de campo ó colectora es biconvexa.

En el ocular de Steinheil ambas lentes son compuestas como la lente del ojo en el ocular de Kellner y tienen la forma biconvexa y puede decirse que es un ocular doble acromatizado.

(1) Santini. Teorica degli strumenti ottici.—Padova.

Las diversas distancias entre las lentes, sus longitudes focales, etc., varían con los constructores, puesto que varían con el índice de refracción y poder dispersivo de los cristales empleados, pero el principio por cuyo medio se obtiene una imagen acromatizada es siempre el mismo.

El Ramsdem se prefiere en general por su sencillez y por su campo plano, cuya última condición es más difícil de obtener con los oculares de Kellner y Steinheil en los telescopios poderosos de longitud limitada, en atención al campo algo mayor de estos oculares. Las lentes compuestas de los últimos, tienen, por otra parte, el defecto de opacarse por la cristalización del cemento que une sus partes componentes.

Salmoiraghi construye un ocular ortoscópico derivado del Ramsdem y muy semejante al de Kellner formado de una lente del ojo compuesta y otra de campo biconvexa (fig. 61), obteniendo mayor campo que con los valores dados por Soldati y disminuyendo la coloración de los contornos de las imágenes.

El campo tiene por expresión:

$$C = \frac{2\pi}{A+1}$$

Salmoiraghi adopta los valores siguientes:

$$e = \frac{p}{A}; \quad q = 2e; \quad r = 0.6\,q; \quad d = 0.4\,q; \quad b = 0.167\,q,$$

y aumentos que detallaremos al hablar de los instrumentos que fabrica. Buff y Berger usan Kellner y emplean para los anteojos de sus tránsitos un aumento de 24 diámetros; para los de sus niveles lo hacen mayor todavía.

Veremos al hablar de la estadia por qué interesa tener, con aumentos poderosos, campos grandes sin deformación de las imágenes.

114. Las combinaciones oculares antes estudiadas nos hacen ver una imagen invertida de los objetos. Con lo dicho

sobre ellas damos por concluído el estudio del primer grupo de anteojos ó sea el de los llamados astronómicos, y entrando al de los del segundo ó sea el de los terrestres de imagen real, describiremos la combinación ocular que se emplea en estos últimos; advirtiendo desde luego, que es mucho más común el empleo de los oculares astronómicos que el de los terrestres en los anteojos de los instrumentos topográficos y universal en los destinados á observaciones astronómicas, en las que no importa absolutamente que la imagen de un astro resulte invertida.

Para que el ojo vea una imagen en posición análoga á la del objeto, es preciso que el ocular invierta la imagen producida por el objetivo que es invertida y la haga así normal.

El ocular terrestre se compone de cuatro lentes cuyo modo de funcionar se comprende fácilmente por el examen de la figura 62, la cual da la marcha de los rayos de luz en la dirección de los ejes secundarios, correspondientes á los extremos M y N de una imagen dada por el objetivo. Se ve por la figura que el efecto de las tres primeras lentes ha sido invertir en M′ N′ la línea M N y la cuarta lente sólo sirve para dar M′ N′ en buenas condiciones de visión.

El ocular terrestre es más largo y por consiguiente menos cómodo que el astronómico, y por otra parte, el mayor número de lentes aumenta la cantidad de luz absorbida por el sistema y la pérdida por reflexiones interiores. Por estos defectos y algunos otros que sería largo enumerar, el ocular terrestre es poco usado; solamente entre los constructores americanos como Gurley, por ejemplo, se emplea esta combinación ocular que puede verse en la figura 51. En este ocular una lente es compuesta (1).

115. Los oculares acodados se emplean para dirigir visuales en direcciones para las cuales no es posible colocar el ojo

(1) Gurley llama á las lentes según su objeto y enumerándolas comenzando del lado del ojo: the eye, the field, the amplifing and the lense.

en el ocular á causa de la posición que éste ocupa respecto de las demás partes del instrumento, como cuando se dirigen visuales á puntos cercanos al zenit, en cuyo caso no puede el observador colocar la cabeza en prolongación del eje óptico.

Para obviar este inconveniente se usan oculares provistos de un reflector de prisma ó de espejo, como lo describen las figuras (63 y 64), de las cuales la primera muestra un ocular de Ramsdem formado de las lentes *q* y *r* y del prisma P cuya cara hipotenusa forma un espejo, que refleja hacia el ojo puesto en O la imagen de la retícula.

La segunda figura nos enseña un ocular de espejo S que refleja la luz cuando atravesó la primera lente *q* y que forma con el eje del anteojo un ángulo de 45°.

Hay otra disposición poco usada en los instrumentos topográficos que consiste en colocar el reflector entre el objetivo y el ocular. Esta se usa en instrumentos astronómicos.

Cuando se desea aprovechar un campo extenso no simplemente para ver sino para efectuar medidas de las imágenes, se encuentra que á cierta corta distancia del centro del campo son éstas mal definidas y carecen de precisión. Por esta razón, sobre la que volveremos en el Capítulo IX, importa tanto la buena construcción del ocular.

El valor de C dado antes puede admitirse para fijar el diámetro del diafragma del campo, pero no para fijar los límites de la imagen útil para visuales de precisión. En ciertos instrumentos topográficos se obvia este defecto haciendo móvil el ocular delante de los hilos, de suerte que se vise la parte que se quiere de la imagen haciéndola caer en el centro del campo ocular.

116. Las figuras 65, 66 y 67 representan un ocular acodado móvil. El prisma está colocado entre el objetivo y el ocular cerca de éste y la imagen se forma en el plano del diafragma *p*. El ocular está colocado sobre un bastidor D (figura 66) colocado entre dos guías *g*, *g'*, que están fijas al tubo

ocular. Un tornillo V fijado á la misma pieza P que las guías, hace correr el bastidor D cada vez que se gira, y transporta el ocular á diversos puntos del campo, permitiendo la observación lejos de su centro y por lo mismo se hace posible tener fuertes aumentos conservando el campo. Los tornillos 1, 2 y 3 sirven para rectificar la retícula: En la figura 67 se ven quitados la pieza D y el tornillo V.

Esta disposición sólo se encuentra aplicada en instrumentos astronómicos porque en los topográficos, relativamente poco pesados y que se usan sobre tripiés de madera para poder ser fácilmente transportables, no podría el ocular móvil dar buen resultado. En efecto es buena regla, una vez fijada una visual, evitar tocar el instrumento por temor de producir un cambio, aunque sea pequeñísimo, en la posición relativa de sus partes. El uso del tornillo V puede producir ese cambio y por esta causa se acude al artificio, que permite aumentar el campo útil sin disminuir el aumento, de multiplicar los oculares.

Reichembach fué el primero que ideó una disposición de esta clase (fig. 68), consistente en dos oculares simples *a*, *b*, montados simétricamente con relación al centro del campo.

Porro llevó á tres el número de oculares (fig. 69) y los hizo compuestos, del tipo Ramsdem. Visaba el centro y dos puntos equidistantes de éste. En los taquímetros Cleps de mayor tamaño está aplicado este ocular múltiple. Veremos al describir los Cleps que mediante el artificio de mover la pieza porta-oculares, pueden visarse cinco puntos del campo que llevan otros tantos sistemas de hilos.

Conclusión.—Potencia de separación de los anteojos.

117. Puesto que los anteojos se aplican á los instrumentos de medida precisamente con el fin de *determinar direcciones con mayor exactitud*, y puesto que esta exactitud depende de múltiples propiedades del anteojo mismo como son:

el poder amplificador, la claridad, la bondad de la imagen (que depende á su vez de la buena combinación de las lentes que forman el objetivo y de las oculares), etc., es conveniente formarse juicio de la potencia de un telescopio, estableciéndolo sobre una base única, sobre la *resultante* de todos los elementos constituyentes, esto es: sobre su fuerza de separación ó de penetración.

Hagamos con el telescopio lo que hicimos al estudiar la agudeza de la vista, esto es, busquemos el menor ángulo que dos visuales comprenden entre sí cuando pueden verse como separadas. Este ángulo, que reconocimos ser de 90″ á 60″ según que se observen objetos terrestres ó celestes, disminuirá con el empleo del anteojo á medida que se use de mayor poder de *penetración* ó *separación*.

A fin de medir la sensibilidad de un telèscopio para la separación, que llamaremos E, se puede proceder del modo siguiente: se dibuja cuidadosamente una escala de líneas equidistantes de grueso igual á su separación (fig. 70), y se coloca sobre una regla vertical que mantiene un ayudante frente al telescopio por experimentar. Se va alejando sucesivamente la regla en la dirección de la visual hasta que el observador vea borrado el dibujo y confundidos los claros y llenos en una tinta gris uniforme. En este momento ordenará al ayudante que se detenga y medirá la distancia del telescopio á la regla que lleva la escala.

El cociente entre el intervalo de los rayos y la distancia límite á la cual se aprecia su separación por el anteojo, expresado en segundos de arco, será el ángulo que representa la sensibilidad del telescopio. Si llamamos a al intervalo entre los medios de dos fajas ó lo que es igual el ancho de una de ellas y D la distancia límite, tendremos:

$$E = \frac{a}{D} 206.265$$

La experiencia se hace mejor disponiendo sobre la regla

varias escalas en las cuales el ancho de las fajas en relación con la distancia está calculado de manera á subtender ángulos de 1″, 2″, 4″, etc., y tomando para D un valor de 50 á 100 metros. Una mayor distancia traería el inconveniente de interponer en la marcha del rayo visual una gruesa capa de aire que haría sentir su influencia, variable según el estado atmosférico, que, como es bien sabido, puede cambiar de tal manera que nada se vea á distancias de menos de un metro en las fuertes nieblas. Por lo tanto, debe observarse en buenas condiciones de limpidez del aire y á distancias cortas.

118. Es necesario notar que, si por ejemplo, el estado de la atmósfera permite observar con un telescopio dado, separaciones de 10″ á una distancia determinada, otro sensible á 2″, á la misma distancia separará ángulos de los dos segundos; pero si por causa del estado de la atmósfera el primero no llega á separar los 10″, tampoco el segundo anteojo apreciará los 2″.

Así pues, la prueba de un anteojo hecha de la manera explicada, en condiciones de transparencia y distancia convenientes, nos dará de un modo decisivo la medida de la sensibilidad *potencial* de aquél y en cuanto á la *actual*, que depende del estado atmosférico en el momento de las observaciones que se hagan de ordinario, será variable con ese estado y por lo mismo no será posible establecer su valor.

Recordemos aquí lo dicho en el párrafo 94 sobre la medida de la sensibilidad de un anteojo en el que se conoce la cantidad $A = \frac{Y}{y'}$ de la manera explicada. Uno y otro método deben ser aplicados y comparados, pues el expuesto en aquel párrafo da para E valores que consideraremos como teóricos, y el método que acabamos de exponer da á conocer un valor de E, que debe considerarse como el práctico, puesto que ha sido determinado como resultante de todas las condiciones particulares de cada anteojo.

119. Para concluir, y á fin de evitarnos en lo de adelante

repeticiones frecuentes, haremos notar que en un anteojo colimador se distinguen tres ejes diversos y bien definidos.

1º El *eje óptico* del sistema de lentes que lo componen.

2º El *eje material* ó *mecánico* que es el del tubo de metal que constituye el anteojo.

3º El *eje de colimación* que es la recta que une el centro óptico del objetivo con el crucero de los hilos de la retícula.

El ideal del telescopio colimador sería aquel en el cual los tres ejes coincidieran en una sola línea, pero como esta condición es punto menos que irrealizable, estudiemos la influencia que en un error en la posición recíproca de cada uno de ellos ejerce sobre el resultado de las observaciones.

120. El eje óptico puede estar dividido en dos: el del objetivo y el del sistema ocular puesto que, como vimos, el último es independiente del primero; pero conviene para que la visión de la imagen sea ópticamente la mejor posible, que los ejes referidos sean coincidentes, ó cuando menos paralelos, aunque geométricamente el defecto de paralelismo no afecta las condiciones del anteojo. Los constructores satisfacen en general este requisito en términos que hacen despreciable el efecto del pequeño error restante en su resultado geométrico aunque dañe un tanto la visión.

Parece á primera vista que es indiferente que el eje de colimación ocupe una ú otra posición con relación al eje mecánico ya que ella determina siempre la dirección fija de la señal; pero debe observarse que al alejar el objetivo de los hilos se produce un movimiento en la dirección del eje mecánico, y si este último no es paralelo al de colimación, la línea visual tendrá tantas direcciones diversas cuantas sean las posiciones del afocamiento.

Supongamos visado un punto muy lejano. Llamemos e la separación entre el crucero de la retícula y el punto en que una línea llevada por el centro óptico del objetivo paralelamente al eje de deslizamiento del tubo afocador, encuentra el plano focal; p la longitud focal del objetivo, y sea v la

variación focal correspondiente al alargamiento necesario para visar una señal cercana.

Si llamamos Φ el error de colimación representado por el ángulo, expresado en segundos, comprendido entre los dos ejes de colimación correspondientes al objeto lejano y al cercano, tendremos:

$$\Phi = \frac{v\,e}{p\,(p+v)}\,206.265$$

Por ejemplo, para $p = 400^{mm}$, $e = 0.^{mm}2$ y $v = 40^{mm}$ tendremos:

$$\Phi = 9''\,28\ (1)$$

Esto nos da una idea de la importancia que tiene el que el eje de colimación coincida con el eje mecánico cuando se deben observar objetos diversamente alejados.

Reasumiendo: no es indispensable que el eje óptico del objetivo y el del ocular se confundan.

Sí lo es el que sean coincidentes el de colimación y el de deslizamiento ó mecánico, según el cual se hace el movimiento para afocar.

CAPÍTULO V.

Medios para determinar planos en el espacio.

121. Ya conocemos cómo funcionan las pínulas, prismas y anteojos para fijar direcciones y así nos será fácil comprender que el movimiento al rededor de un eje de una de las rectas, determinadas para los medios ya dichos, puede producir superficies indefinidas en el espacio.

(1) El desalojamiento de 40^{mm} corresponde á una variación de la distancia entre el infinito y $4^{m}40$, condiciones exageradas como se ve, y aun en ellas la posición del punto para el error de $9''28$, es incierta en un circulito de medio milímetro de diámetro.

Es evidente entonces que si montamos pínulas, un prisma ó un anteojo en un mecanismo apropiado, en un perno, un eje, etc., y movemos aquél, engendraremos una superficie de revolución conoide si la línea visual forma un ángulo distinto del recto con la de rotación ó eje y se encuentra en distinto plano que éste, y formará un verdadero cono si las dos líneas dichas se encuentran en un solo plano. Si el ángulo formado por la línea visual y el eje del movimiento es de 90°, se dará nacimiento á una superficie plana é indefinida.

Desde luego se desprende de lo anterior la necesidad de reconocer si efectivamente las líneas visual y de eje son perpendiculares entre sí, puesto que esta es la condición primera para que se determine un plano indefinido; y en efecto, más tarde veremos la importancia de hacer esta prueba en cualquier instrumento topográfico.

No debemos dejar de notar que en realidad en una observación, primero se determina el plano que comprende el punto de observación y uno ó varios visados, y después se completa dentro de ese plano la fijación de la dirección, pero si bien esto es así prácticamente, el órden lógico nos ha hecho preferir un método de exposición que nos lleve de una manera gradual de lo más á lo menos sencillo.

PARTE SEGUNDA.

DEL ESTABLECIMIENTO DE LOS EJES COORDENADOS.

CAPÍTULO VI.

Medios para determinar la vertical.

122. La determinación de la dirección vertical nos hará conocer la de la línea de intersección de los dos planos coordenados verticales y la del que le es normal ó sea del plano horizontal.

En cada punto del elipsoide terrestre, la dirección de la pesantez es constante y normal á la de las aguas tranquilas cuya superficie suponemos idealmente es la del Globo mismo. Esta constancia en una dirección y la facilidad de determinarla con toda exactitud cada vez que es necesario, nos da un medio fácil para encontrar una línea que tiene la condición de permanencia indispensable para adoptarla como una de las apropiadas á nuestro sistema de ejes; esta es la dirección según la cual cae el centro de gravedad de un cuerpo que se mueve libremente. En rigor las normales á la tierra, trazadas por dos puntos de su superficie, no se encuentran en su centro; pero para las operaciones topográficas que no se extienden sino á distancias relativamente cortas, puede admitirse que

la superficie del globo es esférica, de un radio de 6.366,740 metros y en ese caso las normales tendrán la dirección de los radios mismos de la esfera.

Ya vimos cuál es el valor del ángulo V formado por las verticales de puntos distantes D metros y expresado en segundos:

$$V = 0.\ 0324\ D$$

123. En un punto se determina la dirección de la vertical por uno de estos dos medios.

a Por el hilo á plomo que marca la dirección de la vertical misma y que consiste en un sólido de revolución acabado en punta y suspendido á un hilo que se dispone en el caso de equilibrio, de tal suerte que el punto de suspensión y el centro de gravedad del sistema se hallan sobre la dirección de la pesantez ó sea sobre la vertical. El hilo entonces queda fijado en la repetida dirección.

Las plomadas se usan de la forma que se ve en la figura (71) para colocar un punto (generalmente el centro de un instrumento) sobre la vertical de una señal dispuesta sobre el suelo. También se emplea el hilo á plomo ó pesos metálicos suspendidos de un eje, para determinar la horizontal en los niveles de albañil, de perpendículo y otros que son demasiado conocidos para descritos aquí y cuyos servicios son poco solicitados en la topografía.

b Por medio del *nivel de burbuja* ó más simplemente del *nivel* con el cual se determina la dirección horizontal de una manera mucho más exacta que por el medio descrito antes, y es, por lo mismo, una parte de las más importantes en un instrumento topográfico, presentando, como veremos, la ventaja de dar la dirección vertical, al grado de aproximación requerido en cada caso.

124. *Nivel de burbuja.*—Un nivel consiste en un tubo de cristal cerrado por ambos extremos y lleno casi en su totalidad de un líquido: alcohol, éter, benzina, etc., de tal suerte, que

dispuesto con su eje casi horizontal se vea un pequeño espacio vacío (una burbuja) que está ocupada por aire y vapores del líquido que llena el tubo. No se emplea el agua para llenar los niveles porque se congela fácilmente; se prefieren líquidos muy móviles y refringentes. Esta última propiedad es ventajosa porque permite se vean netamente los bordes de la burbuja, pero algunas veces se forman depósitos de cristales, que perjudican los movimientos de la misma; pero basta lavar el tubo con agua caliente para disolver dichos cristales. La burbuja no debe ser demasiado corta porque la capilaridad paralizaría sus movimientos; tiene comunmente de 3 á 6 centímetros y aun más en los niveles muy sensibles.

La superficie interna del tubo se labra de tal modo que presente la forma de un toro, cuya superficie, como se sabe, es la engendrada por el movimiento de un arco de círculo que gira alrededor de una recta situada en un plano mucho más allá de su centro, del lado de su concavidad y paralela á la tangente al punto medio del arco generador.

En los niveles poco sensibles no se adopta esta forma que presenta dificultades materiales de construcción, sino que simplemente se encorva el tubo ligeramente.

Veremos muy en breve por qué se modifican así los tubos y no se dejan cilíndricos como á primera vista parece más conveniente.

La figura 72 representa un nivel de cristal, según dos secciones; la primera sobre el eje y la segunda perpendicular á la primera. En la figura está exagerada la curvatura del arco *a b c*, director del toro.

El arco *d b e* representa el generador del toro. Importa mucho el darse cuenta de la manera como está construída la superficie interior del nivel, pues es común el creerla engendrada por el movimiento del arco *a b c* alrededor del eje del tubo. Este es un error; pues si así fuese no permitiría el nivel hacer la medida de pequeños ángulos verticales á cuyo papel está también destinado.

125. El radio de curvatura del arco *a b c* se llama *radio de curvatura del nivel, y eje del nivel* la cuerda *a c*. Veremos después la importancia que tiene la medida de aquel radio.

En cuanto al de *d b e*, puede ser cualquiera, aun cuando siempre menor que el de la sección del tubo, pero lo que sí es importantísimo es que cualquier punto de *a b c*, en el cual se haga una sección normal á este último arco y que pase por el eje de revolución del toro se obtenga una forma constante del arco *a b e*.

126. El hecho natural sobre el cual se funda la construcción del nivel es que la superficie líquida que forma la base del casquete que constituye la burbuja de aire, siendo la de equilibrio de una superficie líquida abandonada á la acción de la gravedad, es horizontal, y el vértice de la burbuja señala siempre el punto más alto de la superficie cóncava del nivel.

En el principio de la horizontalidad de la superficie libre de un líquido y en el de los vasos comunicantes se funda la construcción del nivel de agua que también señala la dirección de un plano horizontal (Véase Cuarta parte).

Examinemos ahora cuál será la posición relativa del vértice del nivel (el punto *b* de la figura) y el vértice de la burbuja cuando se hacen sufrir al tubo movimientos de inclinación en el plano vertical que pasa por el eje.

Si por el movimiento del nivel su eje se coloca horizontal, el vértice de aquél ocupa el punto más alto y coincidirá con el centro de la burbuja; si el eje queda inclinado con respecto á la horizontal, el vértice del nivel baja y la burbuja cambiará de lugar hasta que su centro ocupe de nuevo el punto más alto del arco *a b c* (fig. 73), y la línea O B será la vertical que forma con la normal O *b* al eje del nivel un ángulo medido por el arco B *b*, ó lo que es igual, este último expresa la inclinación del eje que llamaremos φ. Esto nos hace comprender la utilidad del nivel para medir pequeños ángulos de inclinación; basta para ello graduar el arco *a b c* en grados

y partes de grado y tomar para hacer las lecturas uno de los extremos de la burbuja como índice, ó mejor el promedio de las lecturas de los dos extremos.

127. Tal es el objeto de los niveles considerados como uno de los órganos de los instrumentos de precisión; pero para que puedan llenar convenientemente su fin, es preciso que los desalojamientos de las extremidades de la burbuja correspondan con los de su vértice, de manera que la media aritmética de la lecturas hechas en los extremos, sea igual á la que se tendría en el vértice de la burbuja si fuera posible determinar la exacta posición de este punto. De aquí la necesidad absoluta de que sea constante la forma de la burbuja de gas, lo cual no puede verificarse sino en tanto que la forma de la concavidad sea la de un toro y no la de un huso, pues si ésta se adoptase la forma de la burbuja sería oval y variaría de dimensiones al cambiar de lugar en el tubo, y en consecuencia no sería exacto deducir la lectura central de la media entre las dos de las extremidades, ni posible llevar en cuenta las alteraciones de forma para calcular la lectura del vértice de la citada burbuja.

Las graduaciones en *a b c*, podrían hacerse de modo que correspondieran á un número exacto de segundos, minutos ó grados, pero esto traería una dificultad más de construcción y se acostumbra hacer simplemente una división arbitraria en partes iguales y el operador determina posteriormente el valor angular de las dichas divisiones.

Llamemos: R el radio de curvatura del nivel.

a la amplitud de una división de la graduación.

φ el ángulo de inclinación correspondiente á un desalojamiento de una división.

Expresándolo en segundos sería:

$$\varphi = 206.265 \frac{a}{R}$$

como es fácil comprender.

A igualdad de valor de a, φ será tanto menor cuanto más grande sea el radio del nivel; es decir: que podrán observarse más pequeñas desviaciones verticales del eje del nivel. Tomando a, por ejemplo de 1^{mm}, para que el nivel sea sensible hasta $1''$:

$$R = 206^{m}.265$$

hasta $10''$:

$$R = 20^{m}.62 \quad \text{etc.}$$

En los instrumentos topográficos se usan radios de 20^{m} á 30^{m}; pero el valor del radio no debe elegirse al capricho, sino que debe estar en estricta relación con el poder óptico del visador empleado y con la mayor ó menor precisión de las graduaciones del instrumento de que forma parte, pues una sensibilidad excesiva es inútil y molesta y una sensibilidad escasa destruye el efecto de otras cualidades del instrumento.

128. Teóricamente la sensibilidad de un nivel depende solamente de su radio de curvatura, pero en la práctica es preciso tener en cuenta otro elemento, que es la *prontitud* con la cual la burbuja alcance su posición definitiva, pues si se mueve lentamente podría inducir en error, haciendo creer que el líquido había ya alcanzado su estado de equilibrio cuando en realidad aún estaba en movimiento. La velocidad de éste depende: 1º, de la resistencia que ofrece la superficie interna del tubo; 2º, de la naturaleza del líquido y 3º de las dimensiones de la burbuja.

Para disminuir la primera causa de retardo se emplean tubos cuya superficie interna es perfectamente lisa.

La naturaleza del líquido influye notablemente sobre la prontitud de las indicaciones del nivel. El éter puro se equilibra en unos segundos, pero no se aplica en los instrumentos topográficos expuestos á grandes cambios de temperatura que dilatan y contraen considerablemente ese líquido y por lo mismo se reserva su uso para los instrumentos astronómicos.

El alcohol puro requiere (según la curvatura, diámetro del tubo y longitud de la burbuja) de veinte á sesenta segundos para alcanzar su equilibrio; Buff y Berger afirman que con el líquido especial usado en sus niveles, bastan de cinco á quince segundos.

La última causa de retardo en los movimientos de la burbuja y que depende de las dimensiones de ésta, es la adherencia del tubo y la burbuja, fenómeno de capilaridad bien conocido.

Se disminuye su efecto empleando tubos de grandes dimensiones, por ejemplo de 18 á 20 centímetros de largo y de 18 milímetros de diámetro interior, cuando debe ser notable la sensibilidad requerida, y se usan tubos menores para menor prontitud.

129. Los niveles de burbuja son muy sensibles á los cambios de temperatura, como se nota observando las variaciones que sufre la longitud de aquélla al variar el grado termométrico. Para evitar errores provenidos de esta causa es indispensable que la burbuja se alargue simétricamente á partir del centro de la escala graduada, lo que depende á su vez de la buena forma del tubo. Debe siempre darse tiempo para que la burbuja ocupe su posición definitiva, y el constructor cuidará de que, aun en el mayor alargamiento de ella, no se oculten sus extremos por la armadura del nivel.

Es preciso hacer notar que un calentamiento desigual del tubo del nivel hace mover la burbuja hacia el extremo más caliente del tubo, probablemente por un cambio sobrevenido en la adherencia del fluido con el tubo y no por una deformación de este último.

Debemos cuidar, por lo mismo, de no someter un nivel á causas que puedan producir ese efecto, y si se hubiese expuesto hay que cubrirlo y esperar un poco de tiempo á que se uniforme la temperatura en el tubo.

En los niveles que forman parte de instrumentos de precisión y que por necesidad se someten á grandes variaciones

de temperatura, se emplea una cámara cuya disposición explica la figura 74.

El diafragma *d* que tiene un pequeño taladro *f* divide el tubo en dos compartimientos: A que funciona como un nivel común y S que es la cámara.

Si se coloca el tubo verticalmente de modo que S quede hacia arriba, el líquido contenido en S cae en A y el aire ó gas pasa á S. Invirtiendo el tubo, el aire pasa á A y el líquido á S. Fácil es entonces el comprender cómo puede regularse la distribución del aire de modo que la longitud de la burbuja sea constante á pesar de los cambios de temperatura.

Los tubos de los niveles comunes están cerrados á la lámpara: pero en los más finos, á fin de evitar deformaciones posibles con el calentamiento á que se someten al cerrarlos, los extremos del cilindro que forma el tubo se obturan con discos planos de cristal ó por medio de membranas animales.

130. *Niveles esféricos.*—Otra forma de nivel que se usa en las planchetas y otros instrumentos que requieren relativamente poca exactitud y se emplea también en los cleps, por la razón que daremos al describirlos, es *la esférica.*

Teóricamente un nivel esférico puede hacerse tan sensible como el cilíndrico, puesto que esta cualidad depende del radio de curvatura; pero como acabamos de ver, para que la burbuja tenga la movilidad necesaria, es preciso que alcance determinadas dimensiones y que, por lo tanto, el nivel sea mayor á medida que se desea mayor sensibilidad, lo cual hace imposible el empleo de niveles de forma esférica cuando se requiere sensibilidad mayor que la de 30″ por milímetro de graduación, pues para exceder de este valor serían necesarios niveles de dimensiones tales que se volverían estorbosos.

Por lo común se da á estos instrumentos un diámetro que no excede de 6 centímetros y su radio es de 10 metros.

En cambio, el nivel esférico presenta varias ventajas sobre

el cilíndrico, como son, entre otras, la de ser más fácil labrar regularmente una superficie esférica que la de un toro, y la de acusar inmediatamente el sentido del desnivel del plano de apoyo sin variar de posición el nivel; lo que no pasa con los cilíndricos.

La construcción de los esféricos (fig. 75) se funda sobre el mismo principio que rige la de los cilíndricos. En reposo el nivel sobre un plano, la burbuja va á ocupar la parte más elevada del casquete esférico y el plano tangente al vértice de la burbuja será horizontal.

131. Tanto los niveles cilíndricos como los esféricos tienen armaduras que los cubren en gran parte y con ellas pueden apoyarse, suspenderse ó fijarse de una manera cualquiera sobre un plano, eje, etc., que forme parte de un instrumento, de tal suerte que la línea ó el plano de apoyo de la armadura satisfaga á la condición precisa de ser paralela al plano tangente al centro del casquete esférico ó paralelo al eje del nivel cilíndrico.

Consideremos (fig. 76) que el dibujo representa una sección transversal de un nivel cilíndrico. Si el plano A B es paralelo á la línea que llamamos eje y lo colocamos sobre un plano y moviendo éste obtenemos que la burbuja ocupe el centro del tubo, concluiremos en ese momento que una línea sobre el plano A B es paralela (en el plano de apoyo) al eje del nivel, y por lo mismo horizontal. Si colocamos el tubo en una dirección distinta de la primera y obtenemos igualmente que la burbuja ocupe el vértice del arco interior del nivel, habremos establecido dos rectas horizontales sobre un mismo plano, el cual será por lo tanto horizontal.

En la práctica no se usan así los niveles, porque estarían muy expuestos á romperse, sino que, como dijimos, se cubren de armaduras metálicas, que además de defenderlos proporcionan la superficie de apoyo, con la enunciada condición de ser paralela al eje del nivel. Si el paralelismo existe, el nivel está rectificado, y para lograrlo, cuando por construcción

no se alcanza, los fabricantes acuden á artificios que permitan establecer ese paralelismo con la posible exactitud.

Las figuras 77 y 78 representan niveles destinados respectivamente á disponer un plano horizontal y un eje A B vertical. El tubo de vidrio está asegurado dentro de una armadura de latón por medio de mastique ó yeso. En un extremo se ve una charnela que permite se eleve ó baje el extremo opuesto del nivel haciendo mover los tornillos *a*, *a'* hasta conseguir se verifique la condición del paralelismo entre el eje del nivel y los puntos de apoyo fundamental para el uso del nivel.

Las figuras 79 y 84 representan armaduras de niveles destinados á poner horizontal un eje cilíndrico. El examen de dicha figura basta para comprenderla y hacerse cargo del modo de usar estos niveles, que se llaman montantes, viéndose también claramente las piezas que sirven para perfeccionar los ajustes.

La figura 80 representa la armadura de un nivel esférico. El plano de apoyo debe ser paralelo, como ya dijimos, al plano tangente al centro del casquete esférico. En el dibujo se ven tres tornillos para rectificarlo V, V', V''; los cuales se disponen de manera que el plano determinado por sus extremos inferiores sea el de apoyo mismo.

132. Puesto que los niveles determinan la horizontalidad de un plano pueden servir para disponer verticalmente un eje de rotación que sea perpendicular al eje del nivel, y en este caso, cualquiera parte de un instrumento fijada á ese eje ó perno material describirá girando un plano horizontal. En el caso presente, la condición por satisfacer es la de perpendicularidad entre el eje del perno P y el eje del nivel (fig. 78).

Veamos ahora cómo se inquiere si se satisface una ú otra de las condiciones dichas: la de paralelismo en un caso y la de perpendicularidad de dos líneas en otro.

133. *Rectificación de un nivel.*—Al efecto, sea M N una regla (fig. 81) que forma con el horizonte el ángulo α y colo-

quemos un nivel sobre ella llevando la burbuja al centro del tubo por medio del tornillo V.

El ángulo que el apoyo A B de la armadura forma con la horizontal X X′ será también α.

Invirtamos ahora el nivel según se ve en la figura 82; la burbuja se desalojará buscando el punto más alto del nivel y recorriendo de 0 á su nueva posición un arco que será la medida del ángulo entre la tangente al centro de la graduación X_1 X_2 y la horizontal X X′. Es fácil ver en la figura que este ángulo es igual á 2 α, y por lo mismo deberá corregirse la mitad del desalojamiento de la burbuja por medio del tornillo del nivel y la otra mitad por medio de los tornillos V_1 V_2 de la regla. Se invierte nuevamente el nivel y vuelve á corregirse el error que aún resultare, mitad con los tornillos de la regla y mitad con el del nivel, continuando del mismo modo hasta que se tenga la misma lectura en las dos posiciones del nivel.

Un eje se dispone verticalmente por medio de una operación análoga á la descrita, y en este caso rectificar un nivel consiste en hacer su eje, ó lo que es equivalente, la tangente X X′ á su punto medio perpendicular al eje de rotación O Z (fig. 83).

Sea P P′ una línea perpendicar á O Z y situado en el plano meridiano del toro; es preciso que X X′ coincida con P P′.

Supongamos que no se verifique esta condición, sino que X X′ y P P′ forman un ángulo α qne medirá el ángulo del eje O Z con la vertical. Coloquemos la burbuja en el centro por medio de los tornillos V_1 V_2, y después de hecho, giremos 180° el nivel. La línea ideal P P′ que suponemos arrastrada por el movimiento, ocupa su misma posición; la X X′ ocupa la posición Y Y′ formando con P P′ el mismo ángulo α, pero en sentido contrario, y por consecuencia su inclinación con el horizonte, ó lo que es igual el desalojamiento de la burbuja será 2 α.

Vemos que en este caso, como en el anterior, la mitad del

error se corrige por medio del tornillo propio del nivel y la otra mitad por medio de los que determinan la posición del eje y son los que se llaman *tornillos nivelantes*, y son en general tres ó cuatro.

134. En los niveles montantes, cuyo oficio es colocarse sobre ejes ó tubos cilíndricos, importa, además, examinar si el eje del nivel y el del cilindro de apoyo son paralelos y no simplemente colocados en planos paralelos, pues se comprende que en este último caso pueden ser falsas sus indicaciones si se mueven hacia uno ú otro lado. La rectificación es bien sencilla después de hecho lo anterior.

Al efecto, se mueve el nivel hacia los lados sin dejar de apoyarlo sobre el cilindro y girando al rededor del eje de éste.

Si la burbuja cambia de posición moviéndose hacia uno de los extremos del tubo, será prueba de que (no obstante la horizontalidad del apoyo) subió el extremo hacia el cual caminó la burbuja y preciso será rectificar el nivel. Con este objeto, el constructor provee los medios adecuados para obtener desalojamientos laterales además de los verticales (figura 84).

Estas rectificaciones no deben considerarse jamás como perfectas y siempre que es posible, deben emplearse métodos de observación que compensen los errores. En los instrumentos muy delicados se hace la lectura del nivel en cada posición del instrumento para corregir después las observaciones hechas.

135. Fácil es imaginar aparatos capaces de medir la sensibilidad de un nivel. La figura 85 representa uno de aquellos cuyo mecanismo se comprende por el examen de la figura. Los tres puntos de apoyo a, b, c, de los cuales el último es la extremidad de un micrómetro C cuya cabeza lleva un disco graduado D que gira frente al índice i, sostienen dos piezas que soportan el nivel cuya sensibilidad se trata de conocer.

Para determinar el valor del ángulo φ de inclinación del

aparato para una vuelta entera del micrómetro tendremos la fórmula.

$$\varphi = 206265 \frac{p}{A}$$

en la que p representa el paso del tornillo y A el radio del arco descrito por el extremo c de la pieza al girar ésta alrededor de $a\,b$.

Una división de las n de la graduación valdrá:

$$\frac{\varphi}{n}$$

y si colocamos el nivel por probar sobre el aparato y movemos N′ divisiones el disco C y recorre la burbuja N divisiones del nivel tendremos:

$$N' = N \frac{\varphi}{n}$$

y así puede conocerse el ángulo de inclinación del nivel para un desalojamiento igual á una de sus divisiones, y medidas éstas deducirse el valor del radio R. Esta prueba repetida en diversos lugares de la graduación manifiesta inmediatamente la bondad ó los defectos de fabricación del tubo.

Cuando el nivel forma parte de un instrumento y no puede aplicarse el aparato anterior (que por otra parte más bien es empleado por los constructores que tienen que probar un gran número de tubos) se recurre al método que consiste en visar una mira vertical graduada, colocada á distancia conocida del observador y cuyo método puede verse en el Capítulo X.

CAPÍTULO VII.

De la orientación de los planos coordenados verticales.

Meridianos astronómico y magnético.

136. Dijimos ya que los planos coordenados destinados á servir de ejes se hacen perpendiculares entre sí y por consiguiente sólo necesitamos estudiar los medios que el Ingeniero emplea para disponer uno de esos planos, pues por su posición relativa quedará fijado el otro.

Indicamos también que un plano se dispone en la dirección del polo de la tierra, ó lo que es igual, se toma el plano que contiene el eje del globo (y se llama plano meridiano) por uno de los coordenados ó bien se adopta el que contiene el eje de una aguja imanada, libremente suspendida por su centro. Las trazas de uno y otro de estos planos verticales se llaman, como hemos dicho antes, meridiana astronómica y meridiana magnética, según el caso.

La aguja imanada proporciona el único medio verdaderamente instrumental que está á disposición del ingeniero para trazar direcciones fijas, sin recurrir á operaciones especiales de referencia á puntos celestes, como es preciso para la determinación de la meridiana astronómica ó verdadera.

Meridiana astronómica.

137. Para fijar esta línea por observaciones del sol ó de alguna estrella, se emplean instrumentos universales de los que más tarde describiremos, y los cuales dan la medida de los ángulos verticales y horizontales. Pudiera, por lo mismo, darse aquí punto á esta cuestión que no parece tener lugar en el presente volumen, que no se ocupa de métodos; pero se construye un pequeño accesorio que se añade por lo general á los instrumentos topográficos americanos, (1) y cuyo princi-

(1) Breithaupt de Cassel y otros fabricantes europeos también lo construyen.

pal oficio es servir para el trazo de la meridiana verdadera por observaciones solares. Creo útil describirlo dando su teoría y explicando su manejo, no obstante que en rigor no es un medio puramente instrumental; pero forma parte de un instrumento topográfico y resuelve muy sencillamente un problema de frecuente aplicación.

Este instrumento es el que llamaré *accesorio solar* [*solar attachment*], y que se usa añadido á un teodolito. Con igual fin se emplea el *compás solar* ó *brújula solar* [*solar compass*]. Estas dos clases de instrumentos tienen entre sí diferencias de detalle, pero igual fundamento.

Uno y otro son muy usados en los Estados Unidos del Norte, donde la ley exige en la medición de las tierras públicas que las líneas principales se refieran al meridiano verdadero.

138. Principiaré por la descripción del solar compass, el cual fué ideado por William A. Burt de Michigan en 1836, y que se ve en la figura (86), tal como lo fabrica W. L. Gur-

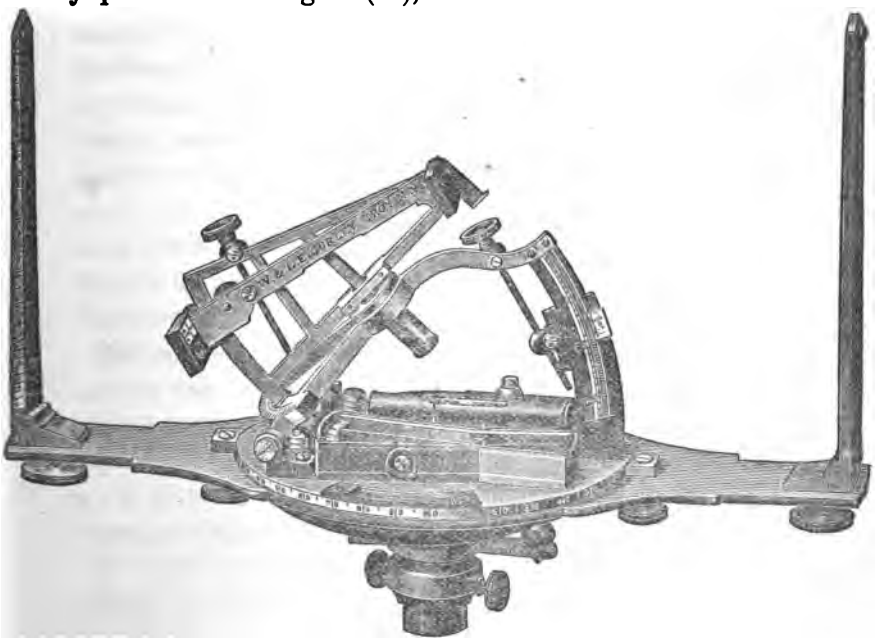


Fig. 86.

ley. Consta de dos círculos concéntricos; uno interior que lleva dos verniers (1) opuestos, de un minuto de aproximación, y otro exterior graduado en medios grados que gira alrededor de un eje vertical y soporta dos pínulas verticales. Estos dos círculos no son otra cosa que un goniómetro común que soporta el aparato solar propiamente dicho, el cual consiste en tres arcos de círculo:

El de latitud, que se ve á la derecha,
El de declinación, hacia la izquierda
Y el de tiempo ú horario, á la izquierda hacia abajo.

El *arco de latitud* tiene su centro de movimiento en el eje junto al nivel, está graduado de 15′ en 15′ y aproxima por medio del vernier hasta un minuto. Tiene además un tornillo de aproximación y uno de presión para paralizar el movimiento. La extensión del arco es de 35°, para que pueda usarse en las latitudes de los Estados Unidos.

El arco de declinación está igualmente graduado y tiene un vernier que aprecia minutos y que gira con la pieza que lleva el nombre "Gurley" alrededor de un centro. Un tornillo de aproximación produce los pequeños movimientos, y otro de presión, que no se ve en la figura, fija sólidamente el brazo "Gurley." El arco mide 28°.

El *arco horario* está sostenido por los dos pivotes del arco de latitud, y conectado con este arco por medio de un brazo encorvado. El arco horario tiene unos 12° de abertura, está dividido en medios grados y horas respectivamente, siendo la división central 90° y 12^h. La lectura se hace por un índice que lleva el arco de declinación en su parte inferior.

A través del centro del arco horario pasa un eje hueco, que soporta el arco de declinación y permite moverlo á un lado y otro sobre la superficie del arco horario, y aun invertirlo completamente. Este eje se llama *eje polar*.

(1) Para el vernier véase el capítulo XI.

En cada uno de los extremos del brazo está fijado un block rectangular de bronce en el cual está colocada una pequeña lente convergente, cuyo foco principal corresponde á la superficie más inmediata del block opuesto. Esta superficie está cubierta por una placa de plata A fija con tornillos al block, y en la cual están trazadas dos series de líneas que se cortan en ángulos rectos (fig. 87); las **b b** se llaman líneas horarias,

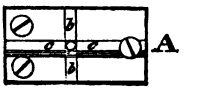


Fig. 87.

y las **c c** líneas ecuatoriales, por la relación que tienen con la hora del día y la posición del sol respecto del ecuador. Las líneas **c c** son paralelas al arco horario.

El instrumento tiene además los niveles necesarios para colocar horizontalmente el círculo azimutal, y está provisto de una caja N que encierra una aguja imanada que puede recorrer un arco de 36 grados, límite del encerrado en la caja. Éste, que constituye con la aguja lo que se llama declinatorio magnético, puede girar alrededor de su centro para el caso en que se quiere que, indicando la línea de las pínulas el norte verdadero, la aguja marque sobre el arco del declinatorio la cifra correspondiente á la declinación magnética del lugar de observación.

139. Antes de establecer la teoría del compás solar y de su derivado el accesorio solar, recordemos algunos principios de cosmografía que nos servirán para exponer fácilmente aquélla.

La tierra ejecuta una revolución sobre su eje polar en 24 horas girando del Oeste al Este. El círculo máximo perpendicular al eje polar y trazado sobre la superficie del globo, se llama ecuador terrestre, y el producido en la esfera celeste por el plano del ecuador, llámase ecuador celeste.

Los círculos menores paralelos al ecuador se llaman paralelos.

La órbita de la tierra es el camino que recorre en su revolución anual. Si el plano de esta órbita se prolonga á la bóveda celeste se traza la eclíptica que es el camino aparentemente recorrido por el sol.

El eje de la tierra forma con el plano de la órbita un ángulo de 66° 32′ ó, lo que es igual, los planos de la eclíptica y el ecuador forman un ángulo de 23° 28′, cortándose la eclíptica y el ecuador celeste en dos puntos que se llaman equinoccios.

La *declinación* del sol es su distancia angular Norte ó Sur, al ecuador celeste. Cuando está en los equinoccios la declinación es nula, lo que se verifica hacia el 21 de Marzo y el 21 de Septiempre de cada año. La declinación á partir de estos puntos aumenta constantemente hasta un máximum de 23° 28′ en los dos solsticios hacia el 21 de Junio y 22 de Diciembre.

El *zenit* de un lugar es el punto que queda directamente sobre la vertical. El plano que pasa por el punto de observación perpendicularmente á la línea del zenit se llama plano del horizonte ó plano horizontal.

La *altura meridiana del sol* es su elevación angular sobre el horizonte, cuando pasa por el meridiano del lugar.

La latitud de un punto es su distancia angular al ecuador ó, lo que es igual, la altura ángular del polo sobre el horizonte del lugar. La latitud es Norte ó Sur.

La *longitud* de un punto es la distancia en grados ó tiempo del meridiano del lugar al elegido como origen de longitudes. La longitud es Este ú Oeste.

Las latitudes se cuentan sobre el meridiano, y las longitudes sobre el ecuador.

La *distancia zenital* de un punto visado desde otro es el ángulo que la visual forma con la vertical del punto de estación.

El *triángulo astronómico* es el esférico que tiene por vértices: *el zenit*, *el polo* y *el astro* observado, que en nuestro caso es el

sol. Sus *lados* son la *distancia zenital*, la co-declinación ó sea el complemento de la declinación, y la co-latitud complemento de la latitud, ó sean respectivamente los lados *zenit-sol*, *polo-sol* y *zenit-polo*. Sus ángulos son: el ángulo en el polo llamado *horario*, y que está formado por el meridiano del observador y el que pasa por el astro; el ángulo en el zenit, llamado *azimut*, y que está formado por el meridiano del observador y el plano vertical que pasa por el astro, y el ángulo en el astro cuyo conocimiento no nos es de utilidad.

Si suponemos al sol recorriendo el ecuador, la medida de su distancia zenital meridiana nos daría desde luego la latitud; pero como ese astro se separa en su marcha del plano ecuatorial, es decir, como su declinación varía, si conocemos el valor de la última exactamente en el momento del paso meridiano, podremos, aumentando ó disminuyendo la declinación (según el caso) á la distancia zenital, obtener la latitud.

Tal es el principio que se aplica en los instrumentos de que venimos ocupándonos.

El día *solar* es el intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos del centro del sol por un meridiano. La duración del día solar es variable, á causa de las diferentes velocidades de la tierra en su órbita y de la inclinación del eje.

Para tener una medida uniforme del tiempo, tal como es posible obtenerla de nuestros mecanismos, se ha recurrido al *día medio*, cuya duración es el término medio de la de todos los días solares del año, y es la señalada por los relojes comunes.

El sol en unas épocas adelanta y en otras atrasa del tiempo medio. La diferencia se llama *ecuación del tiempo*. El momento en que el sol pasa por el meridiano se llama *medio día verdadero*, y el en que pasaría el sol cuyo movimiento suponemos uniforme, se llama *medio día medio*. Es la hora 12^h ó 0^h de los relojes.

Conocido el momento del paso del sol verdadero por el meridiano, se deduce la hora media correspondiente, aumentan-

do á la verdadera la ecuación del tiempo con su signo, y vice versa, la hora verdadera del paso se deduce de la media.

140. Supongamos ahora que hemos colocado el eje polar **p** paralelo al eje de la tierra y que nos hallamos en la época de un equinoccio. La declinación del sol será 0°, y colocaremos el vernier del arco **b** en cero.

Si entonces giramos la pieza **h** alrededor del centro del arco horario **c**, su movimiento corresponderá exactamente con el aparente del sol en el cielo en el día y lugar de observación; de tal suerte, que la imagen del sol formada entre las líneas **c c** por la pequeña lente en la mañana, por ejemplo, continuará el resto del día en la misma posición, si vamos girando la pieza **h** alrededor del centro del arco horario á medida del movimiento solar.

Al pasar el sol por el meridiano en el círculo horario, la lectura será 12^h, y los arcos de declinación y latitud se hallarán en el mismo plano.

Continuando el movimiento llegará **h** á una posición opuesta á la que ocupó á la salida del sol, y la imagen del astro habrá continuado entre las líneas ecuatoriales de la placa.

Supongamos ahora el caso más general de una observación hecha fuera de las épocas equinocciales. La diferente declinación modificará las circunstancias.

Si tomamos de unas efemérides la declinación del sol para el día y hora de observación, y el valor que para ella nos resulte lo marcamos sobre el arco **b**, se comprende fácilmente que podremos seguir la marcha del sol conservando su imagen en la placa, de igual manera que lo hicimos en el caso menos general antes considerado. Notemos que si la declinación es austral, como sucede del 22 de Septiembre al 20 de Marzo, el arco **b** debe quedar hacia abajo, como se ve en la figura, y se usa la lente **o** y la placa **u**. El resto del año se emplea la lente y placa opuestas, invirtiendo el arco **b**, lo cual es obvio comprender.

Si disponemos el compás solar con su círculo azimutal per-

fectamente horizontal, y marcamos en el arco de latitud la conocida del lugar, en el de declinación la calculada para el momento de la observación, y colocamos el instrumento próximamente por medio de la aguja del declinatorio, en la línea Norte Sur, *la imagen del sol no puede hacerse caer entre las líneas ecuatoriales, á menos que el eje polar se coloque en el plano del meridiano del lugar* ó, lo que es igual, en una posición paralela al eje de la tierra. La más ligera desviación de esta posición hará que la imagen pase arriba ó abajo de estas líneas, y revelará el error de orientación.

Así, pues, de la posición del sol deducimos una cierta dirección absolutamente fija para medir los azimutes y determinar la colocación de nuestros planos coordenados.

Este principio es, no solamente el que sirve de base á la construcción del compás y accesorio solares, sino que es también la razón de su superioridad sobre la brújula que, como veremos, está sujeta á numerosas desviaciones de una direcrección fija. Puede decirse que estos instrumentos resuelven mecánicamente el triángulo astronómico.

Accesorio solar.

141. Daremos adelante el método para determinar la latitud, y estudiaremos el seguido para trazar la meridiana que ya dejamos indicado someramente; pero á fin de evitar repeticiones, describiremos el accesorio solar, que no es otra cosa que el compás solar de Burt, aplicado á un teodolito, más reducido en dimensiones y sin arco de latitud, porque el vertical del teodolito hace las veces de este arco.

Hay una diferencia además entre el accesorio y el compás, consistente en la disposición del eje polar que en el primero está dirigido hacia arriba, y hacia abajo en el segundo.

La figura 88 representa el accesorio solar construído por Gurley, y el dibujo es el dado por el profesor Haupt, autor de la obra "The Topographer, his methods, and instruments,"

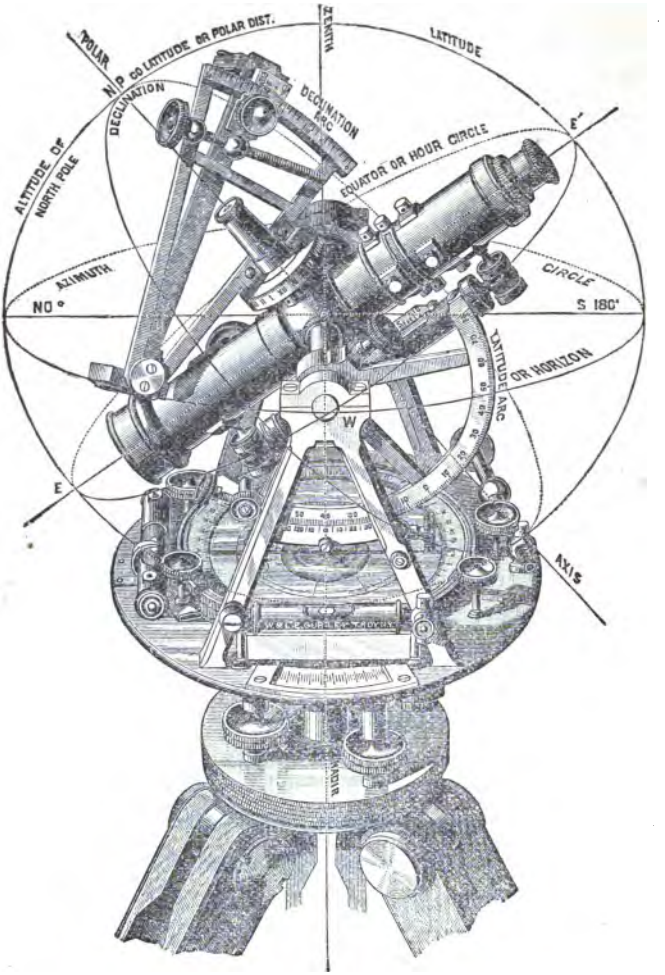


Fig. 88.

y muestra á la vez la colocación de los círculos y líneas que importa considerar. (1)

(1) El dibujo que publico, así como el del solar compass y otros varios que citaré en su oportunidad, me han sido bondadosamente proporcionados por los Sres. W. & L. E. Gurley de Troy, N. York, E. U.

El *arco de latitud* es el vertical del teodolito y aproxima á 1′. Su radio es de 2½ pulgadas inglesas.

El *arco de declinación* tiene de radio unas 5 pulgadas inglesas, y permite leer, por medio de un vernier cuya graduación está en el plano mismo de la del arco, hasta 1′. El brazo de declinación tiene las lentes y placas de plata en los dos blocks opuestos, precisamente como las del compás solar, y puede fijarse ó moverse suavemente por medio de los tornillos de presión ó de aproximación, que se ven en la figura. El arco de declinación se gira sobre su eje para usar una ú otra de las lentes, según que la declinación solar en la época sea Norte ó Sur. La figura representa el caso de declinación Norte.

El *círculo horario* rodea la base del eje polar al cual es normal, y por lo mismo es paralelo á la línea de colimación del telescopio, la cual á su vez debe serlo al eje del nivel paralelo que queda abajo del anteojo. El círculo está dividido de 5 en 5 minutos de tiempo, y numerado de I á XII y se lee por medio de un pequeño índice fijado al arco de declinación y movible con él.

El eje polar tiene una base circular agrandada, que está conectada sólidamente con un disco de 1½ pulgadas de diámetro por medio de cuatro tornillos que pasan de la parte inferior del disco á la base del eje. Este disco está invariablemente fijado al telescopio. Los cuatro tornillos citados sirven para rectificar la posición del eje polar como veremos á su tiempo.

El dibujo representa el eje polar paralelo al eje de la tierra, esto es: en la posición precisa que debe tener á la hora de una observación.

Buff & Berger construyen el accesorio tal como lo representa la figura 89, (1) y en vez de las lentes y placas del modelo de Gurley, tiene un pequeño anteojo de media pulgada de

(1). Los Sres. Buff y Berger de Province Court–Boston, se han servido remitirme el cliché de esta figura y otros muchos que señalaré debidamente.

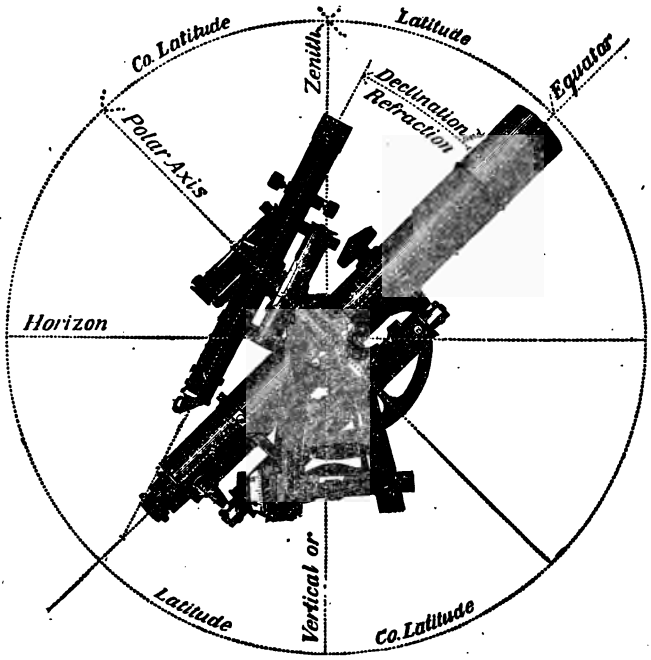


FIG. 89.

abertura por 6 de longitud, de ocular acodado y provisto de una retícula. Con objeto de hacer menos pesado y costoso el accesorio se ha suprimido el arco de declinación y se usa en su lugar el de latitud que es á su vez suplido por el vertical del teodolito. Paralelo al eje del anteojo solar se halla un nivel y otro paralelo al anteojo principal del teodolito. Este accesorio es más sencillo que el Gurley é igual en resultados.

Hay algunos otros modelos de accesorio solar, pero son modificaciones de detalle de los ya descritos y se comprenden fácilmente sus defectos ó ventajas.

142. Veamos ahora la manera de usar estos instrumentos.

Declinación.—La primera operación que debe hacerse es determinar la declinación del sol para varias horas del día de observación y preparar una tabla con los resultados. Para

ello se toma de un Almanaque la declinación que allí se da para cada día á la hora del medio día del primer meridiano adoptado. El valor que da el Almanaque se corrige calculando la variación debida al tiempo que transcurre entre la hora del paso por el primer meridiano y la del paso por el del observador ó sea la corrección por longitud y se obtiene así la declinación á medio día del lugar de observación. La declinación á otra hora se calcula fácilmente sumando con su signo á la del medio día la variación horaria que dan las tablas.

Refracción.—El valor obtenido necesita una corrección, y es la debida al efecto de la refracción que hace ver el astro más elevado sobre el horizonte de lo que en realidad lo está y esto no siempre una misma cantidad, sino que, como es bien sabido, el efecto del fenómeno es máximo en el horizonte y nulo en el zenit, y variable además con las condiciones atmosféricas. La altura del sol sobre el horizonte depende á su vez de la latitud del lugar, de la declinación solar y de la hora de observación.

Al aumentar la refracción la altura aparente, afecta la declinación del sol aumentándola ó disminuyéndola según sea ésta del mismo ó diferente signo que la latitud. La tabla que damos adelante está calculada aplicando á la declinación observada la parte que le corresponde de corrección por el cambio de altura aparente. La parte de este cambio que afecta el ángulo horario, por su pequeñez no es necesario tenerla en cuenta.

Para conocer fácilmente la corrección de la declinación puede usarse la tabla que sigue, la cual comprende todas las latitudes de la República de $2\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$ grados, lo que es bastante para el caso, con las declinaciones de $+20°$ á $-20°$, siendo $+$ al Norte y $-$ al Sur del Ecuador y desde el meridiano hasta cinco horas antes ó después del paso. La refracción á 0^h es la refracción meridiana. No llevamos en cuenta

la corrección por temperatura y presión, pero si se desea considerarla procédase como explica el volumen 2º (1)

Hay que tener presente que cuando la declinación es *Norte* ó + en la tabla, la refracción se *añade* y cuando es *Sur* ó —, se resta de la declinación para poner el resultado sobre el arco respectivo.

Nótese que cuando la declinación es Sur ó — la refracción aumenta muy rápidamente al acercarse el sol al horizonte, y por lo tanto en esa época no debe observarse léjos del meridiano.

TABLA calculada por Edward W. Arms.—C. E.

DECLINACIONES.

Para latitud 15°.

Angulo horario.	+20°	+15°	+10°	+5°	0°	—5°	—10°	—15°	—20°
0 h	—05″	0″	+05″	10″	15″	21″	27″	33″	40″
2	—03	+02	07	12	18	23	29	36	43
3	+01	05	11	16	22	28	34	41	49
4	08	12	19	24	30	37	44	53	1′04
5	29	34	41	49	59	1′10	1′24	1′43	2′08

Para latitud 17° 30′.

0 h	—02″	+02″	08″	13″	18″	24″	30″	36″	44″
2	0	05	10	15	21	27	33	40	48
3	+02	10	15	21	27	33	40	48	57
4	13	18	23	29	35	43	51	1′01	1′13
5	34	41	49	58	1′10	1′23	1′41	2′06	2 42

(1). Véase 2° tomo. Nivelación Trigonométrica.

DECLINACIONES.

Para latitud 20°.

Ángulo horario.	+20°	+15°	+10°	+5°	0°	−5°	−10°	−15°	−20°
0 h	0″	05″	10″	15″	21″	27″	33″	40″	48″
2	03	07	13	18	24	30	36	44	52
3	06	13	18	24	30	36	44	52	1′02
4	17	22	28	35	42	50	1′00	1′11	1 26
5	39	47	57	1′07	1′20	1′37	2 00	2 32	3 25

Para latitud 22° 30′.

0 h	02″	08″	13″	18″	24″	30″	36″	44″	52″
2	06	11	15	21	27	33	40	48	57
3	11	15	21	27	33	40	48	57	1′08
4	20	26	32	39	46	56	1′07	1′19	1 37
5	45	53	1′03	1′16	1′31	1′52	2 21	3 07	4 28

Para latitud 25°.

0 h	05″	10″	15″	21″	27″	33″	40″	48″	57″
2	08	14	19	25	31	38	46	54	1′05
3	12	18	24	30	37	44	53	1′04	1 18
4	23	29	35	45	53	1′03	1′16	1 31	1 52
5	49	59	1′10	1′24	1′52	2 07	2 44	3 46	5 43

Para latitud 27° 30′.

0 h	08″	13″	18″	24″	30″	36″	44″	52″	1′02″
2	11	16	22	28	34	41	49	1′00	1 10
3	17	22	28	35	42	50	1′00	1 11	1 26
4	28	35	42	-50	1′00	1′11	1 26	1 43	2 09
5	54	1′05	1′18	1′34	1 54	2 24	3 11	4 38	8 15

Para latitud 30°.

0 h	10″	15″	21″	27″	33″	40″	48″	57″	1′08″
2	14	19	25	31	38	46	54	1′05	1 18
3	20	26	32	39	47	55	1′06	1 19	1 36
4	32	39	46	52	1′06	1′19	1 35	1 57	2 29
5	1′00	1′10	1′24	1′52	2 07	2 44	3 46	5 43	13 06

DECLINACIONES.

Para latitud 32° 30′.

Ángulo horario.	+20°	+15°	+10°	+5°	0°	−5°	−10°	−15°	−20°
0 h	13″	18″	24″	30″	36″	44″	52″	1′02″	1′14″
2	17	22	28	35	42	50	1′00	1 11	1 26
3	23	29	35	43	51	1′01	1 13	1 28	1 47
4	35	43	51	1′01	1′13	1 27	1 46	2 13	2 54
5	1′03	1′15	1′31	1 53	2 20	3 05	4 25	7 36	

Para latitud 35°.

0 h	15″	21″	27″	33″	40″	48″	57″	1′08″	1′21″
2	20	25	32	38	46	55	1′05	1 18	1 35
3	26	33	39	47	56	1′07	1 21	1 38	2 00
4	39	47	56	1′07	1′20	1 27	1 59	1 38	3 25
5	1′07	1′20	1′38	2 00	2 34	3 29	5 14	10 16	

Para latitud 37° 30′.

0 h	18″	24″	30″	36″	44″	52″	1′02″	1′14″	1′29″
2	22	28	35	42	50	1′00	1 12	1 26	1 45
3	29	36	43	52	1′02	1 14	1 29	1 49	2 16
4	43	51	1′01	1′13	1 27	1 49	2 14	2 54	4 05
5	1′11	1′26	1 44	2 10	2 49	3 55	6 15	14 58	

Para latitud 40°.

0 h	21″	27″	33″	40″	48″	57″	1′08″	1′21″	1′39″
2	25	32	39	46	52	1′06	1 19	1 35	1 57
3	33	40	48	57	1′08	1 21	1 38	2 02	2 36
4	47	55	1′06	1′19	1 36	1 58	2 30	3 21	4 59
5	1′15	1′31	1 51	2 20	3 05	4 25	7 34	25 18	

Para latitud 42° 30′.

0 h	24″	30″	36″	44″	52″	1′02″	1′14″	1′29″	1′49″
2	28	35	39	50	1′00	1 12	1 26	1 45	2 11
3	36	43	52	1′02	1 13	1 29	1 49	2 17	2 59
4	50	1′00	1′11	1 26	1 44	2 10	2 49	3 55	6 16
5	1′16	1 36	1′58	2 30	3 22	5 00	9 24		

La tabla anterior da la corrección por la refracción sin tener en cuenta las variaciones que sufre en su valor por los cambios de temperatura y presión, pero dada la aproximación que se puede obtener en el círculo de declinación, sería inútil esta nueva corrección á la refracción media que proporcionan las tablas con bastante exactitud para la práctica, máxime si se sigue la regla general de observar el sol cerca del paso meridiano.

Preparada una serie de declinaciones ya corregidas por refracción para las varias horas del día que se desea sean las de observación, se van colocando las cifras respectivas sobre el arco correspondiente, anticipando un poco de tiempo á la hora calculada; se dispone el instrumento bien nivelado y orientado próximamente, sirviéndose de la aguja del declinatorio magnético corrigiendo su rumbo por el valor de la declinación, estima que en cada lugar se conoce con cierta aproximación.

143. *Latitud.*—Igualmente se conoce con aproximación la latitud del lugar, dato que se indica en el arco de latitud y que puede obtenerse con la exactitud necesaria del modo que sigue: se determina la declinación del sol para el medio día del lugar de observación y se corrige el resultado por refracción. Este valor corregido se indica exactamente en el arco de declinación, cuidando de los signos de dicha corrección.

Se toma del Almanaque la ecuación del tiempo para el día dado á fin de conocer la hora media del paso meridiano del sol. Unos 15 ó 20 minutos antes de esta hora, se pone el instrumento en estación, se nivela y se fija en XII del círculo horario el índice de la parte inferior del arco de declinación, con lo cual éste queda en el plano mismo del círculo de latitud. Se gira el instrumento entero al rededor de su eje vertical hasta traer la lente solar en dirección del sol.

Se mueve el tornillo de aproximación del arco de latitud alzándolo ó bajándolo del lugar de la graduación que en él se marcó (y debió ser el de la latitud supuesta) hasta que la

imagen del sol caiga precisamente entre las líneas ecuatoriales de la placa y á la vez se va girando el instrumento todo, al rededor del eje vertical á medida que se mueve el sol, de manera que con ambos movimientos, zenital y azimutal del instrumento, se consiga mantener la imagen del astro entre las líneas horarias y ecuatoriales de la placa.

A medida que el sol asciende, su imagen se mueve hacia abajo de las líneas ecuatoriales, hasta que llegado el momento ya calculado del paso meridiano, que es el del cambio del movimiento de ascendente á descendente, se observe el instante de esta modificación y se fije el círculo vertical, leyendo en él una de las coordenadas geográficas del punto de observación: la latitud, la cual se usará en las operaciones subsecuentes para trazar la meridiana. Esta observación es conveniente repetirla varios días para obtener un valor medio más exacto.

144. *Meridiana.*—Colocados en los arcos de latitud y declinación los resultados obtenidos de la manera expuesta, fijado en 0° el círculo azimutal y orientado el eje polar por medio de la observación anterior ó próximamente con ayuda de la aguja magnética, se dirige la lente solar hacia el sol, y con una mano en el tornillo de aproximación del círculo azimutal y otra en el arco de declinación, pero sin variar esta última, se mueven uno y otro hasta que la imagen del sol aparezca en la placa focal, acabando de llevarla suavemente al centro del crucero de las rayas.

La línea visual de las pínulas en el compás solar ó la de colimación en el teodolito, indica la dirección de la meridiana por la razón que antes expusimos, y puede colocarse una señal que la demarque ó bien leerse sobre el círculo horizontal el azimut de una señal ya fijada moviendo solamente la placa de los verniers. Esta operación repetida en las diversas horas para las que se calculó la declinación dará una serie de azimutes de la cual se deducirá un promedio. Excusado parece decir que se facilita la operación llevando el arco

de declinación al plano de la cifra que, sobre el círculo horario, indica la hora de cada observación.

Determinada la latitud y la dirección del meridiano, nótese que también puede conocerse la hora, sumando á la acusada por el círculo horario, la ecuación del tiempo con su signo para tener la hora media.

Conocido el meridiano verdadero, se conoce la declinación de la aguja magnética y si no se requiere gran exactitud, puede usarse ésta, volviendo de tiempo en tiempo á determinar su desviación.

En México la ley previene que se dé el valor de la declinación en los planos de terrenos baldíos, pero en muchos de los que he tenido ocasión de ver, ese dato es indudablemente de simple estima, lo cual es de sentirse, pues ya se habrían reunido importantes datos para formar la carta isogónica de la República.

En los Estados Unidos se observa puntualmente la prescripción legal y las líneas se refieren al meridiano verdadero, por lo cual, los instrumentos solares ya descritos se usan continuamente en las mediciones de tierras.

145. El modelo de accesorio solar de Buff y Berger, como ya dijimos, carece de círculo de declinación y con ese instrumento se procede como sigue: se nivela el círculo azimutal del teodolito y después el anteojo principal por medio de su nivel dirigiendo el objetivo hacia el Sur. Si la declinación es Norte, se baja el objetivo hasta que el círculo vertical dé por lectura el valor de la declinación, más la corrección por refracción. Si la declinación es Sur, se levanta el objetivo.

Hecho esto se gira el anteojo solar hasta que ocupe el plano del telescopio principal; se nivela el solar por medio de un nivel particular y se fija por su tornillo de presión. Es evidente que el ángulo formado por las líneas de colimación de los anteojos es igual al inscrito en el arco vertical que ha venido de este modo á servir de arco de declinación.

El procedimiento para determinar la latitud y la meridia-

na es idéntico al descrito. En este caso la imagen del sol dada por el ocular acodado, se corta en su centro por los hilos de la retícula del anteojo solar, que sustituye las rayas de la placa del modelo Gurley.

Según estos constructores, el error que puede cometerse con sus instrumentos es inferior á $\frac{1}{4}'$ en la dirección del meridiano verdadero observando la imagen del sol por medio de una lente (1).

146. Observemos de paso que si por ejemplo se trata de trazar orientada una línea Norte–Sur debe irse corrigiendo la latitud á medida del desalojamiento, y que para orientar más rápidamente debe visarse la estación anterior é invertir 180° acabando el trazo por los medios explicados.

Obsérvese también, si se trata de trazar un arco de paralelo, que sólo debe admitirse es normal al meridiano para cortar distancias, y para las mayores, debe repetirse la línea Norte Sur y trazar á 90° el arco de paralelo, pues los meridianos son convergentes.

Correcciones del accesorio solar.—El accesorio solar Gurley debe satisfacer á las siguientes condiciones:

I. El eje de cada lente solar debe pasar por entre las líneas ecuatoriales de la placa opuesta.

II. La línea del cero del arco de declinación debe ser paralela al plano del círculo horario.

III. El eje polar debe ser normal á este mismo círculo.

IV. La línea de 12^h del horario debe corresponder al eje del anteojo.

Para examinar si se verifica la primera condición, se quita de su lugar el brazo de declinación separando los tor-

(1). Gurley's manual, 1895 Edition, pág. 103. Creemos excepcional este resultado. Buff & Berger dicen que el error máximo admitido por las autoridades de Manitoba está comprendido entre 3′ y 4′ y que con su "New Solar" con mucha facilidad puede el ingeniero hacer su trabajo mucho más exacto que el fijado como límite. En los trazos de líneas en las tierras públicas de los Estados Unidos el error debe ser menos de 10′ (Véase Hand book of the Engineer's and Surveyor's instruments–1896 Edition.)

nillos de presión y aproximación correspondientes y el tornillo central, y en lugar del brazo se coloca una pieza que viene con cada instrumento fijándola en los agujeros que ocupan los tornillos quitados. El brazo se coloca sobre la pieza y se dirige al sol moviendo los tornillos del instrumento hasta que la imagen solar se traiga entre las líneas ecuatoriales de la placa opuesta.

Cuidadosamente se gira el brazo hasta que descanse sobre la pieza accesoria por las opuestas caras de los blocks rectangulares y vuelve á observarse la imagen del sol. Si queda entre las líneas como antes, la posición es correcta; si no sucede así, se aflojan los tres tornillos que fijan la placa con las líneas al block y ésta se mueve la mitad del error resultante en la posición de la imagen del sol.

Se trae nuevamente la imagen entre las líneas por los tornillos del instrumento y se repite la operación hasta destruir el error. Luego se hace igual prueba y corrección á la otra lente y placa. Esta corrección rara vez es necesaria.

Para investigar si está satisfecha la segunda, se pone en cero el vernier del círculo de declinación y se dirige el anteojo de modo que la imagen del sol formada por la lente solar caiga entre las líneas ecuatoriales de la placa opuesta. Se fija el telescopio por el tornillo de presión del movimiento vertical y se gira el accesorio 180° para que la imagen del sol se forme en la placa que antes se dirigió hacia el astro. Si la imagen resulta nuevamente entre las líneas ecuatoriales, el ajuste es perfecto; en caso contrario, se corrige por medio de dos tornillos que permiten desalojar el vernier.

Para examinar la tercera condición, se coloca horizontal el instrumento por medio del nivel del telescopio hasta que en una revolución completa del instrumento, la burbuja no salga del centro del tubo. Se coloca en cero el vernier de declinación y este arco en el plano del eje del anteojo, montando un nivel (que para este efecto viene en la caja del instrumento) sobre los blocks rectangulares y la burbuja de este

último nivel se lleva al centro por medio del tornillo de aproximación del arco de declinación.

Después se gira el arco 180°; si en la nueva posición la burbuja del nivel vuelve al centro, el eje polar es vertical en esta dirección ó sea normal al círculo horario que está horizontal; si no sucede así, se corrige la mitad del error por medio de dos tornillos de los que quedan bajo la base del eje polar y la otra mitad con el tornillo de aproximación del círculo de declinación, y se repite le operación hasta que la burbuja quede enmedio cuando se invierte el nivel.

Se gira en seguida el arco de declinación hasta tenerlo en posición normal á la anterior; si la burbuja no ocupa su posición central se lleva á ella moviendo los otros dos tornillos que hay debajo del horario en línea con el eje de rotación del telescopio y el tornillo del arco de declinación de la manera explicada antes.

Estas operaciones se repiten hasta conseguir que en toda una revolución del nivel, la burbuja ocupe el mismo lugar, lo que probará que el eje polar es vertical, y por consecuencia, normal al círculo horario. El nivel montante se ha supuesto previamente corregido y fácil es hacerlo como se explicó en el capítulo anterior.

Este es el ajuste más importante del accesorio solar, y por lo mismo el que requiere mayor cuidado.

La cuarta condición se satisface colocando previamente el instrumento en el meridiano por el método explicado y en el momento de la culminación solar debe el círculo horario indicar la hora aparente del paso que es igual á 12 horas más la ecuación del tiempo. Si no se verifica esta condición, se gira el círculo horario, para lo cual se aflojan dos tornillos de cabeza plana que lo sujetan.

Es fácil en caso de encontrarse con un compás ó accesorio solares distintos del Gurley, estudiar el modo de rectificarlo, pero repetiremos, que siempre es mejor hacer observaciones

de tal suerte, que compensen ó eliminen los errores, mejor que confiar en las correcciones materiales del instrumento.

148. Entre los métodos más usados para trazar la meridiana verdadera, se encuentran los de alturas iguales y azimutes del sol, que describiremos en el 2º volumen, y por tanto sólo harémos presente en este lugar que para facilitar al topógrafo la observación de ese astro se ha ideado por J. B. Davis y Berger el accesorio que representa nuestra figura 90 y cuyo objeto es observar sobre la pantalla de vidrio despulido que se ve ~~ve~~ en el dibujo, la imagen del sol y la de la retícula, sea valiéndose del ocular común ó de un acodado. El uso de este pequeño instrumento es muy cómodo cuando es pequeña la distancia zenital y en nada daña á la exactitud de las observaciones. (1)

La pantalla está en tres posiciones: para visuales muy altas en ocular acodado; para inclinaciones que no exigen dicho ocular y en la posición que se da á la pantalla cuando no se usa. La pequeña figura representa un vidrio oscuro para observar el sol directamente.

Meridiana magnética.

149. Hemos dicho varias veces que la meridiana magnética no se determina con la misma precisión que la astronómica, pero si bien sólo da la aguja imanada un cierto grado de aproximación, en cambio es muy rápido su empleo y á la vista va dando los azimutes de las líneas observadas.

En aquellos casos muy frecuentes en que no tiene importancia la orientación absoluta, como por ejemplo en levantamientos de detalles que se refieren después á líneas de azimutes determinados astronómicamente, etc., la aguja es de gran utilidad.

(1). Para el detalle y uso de la pantalla de Davis véase la obra citada de Buff & Berger, página 50.

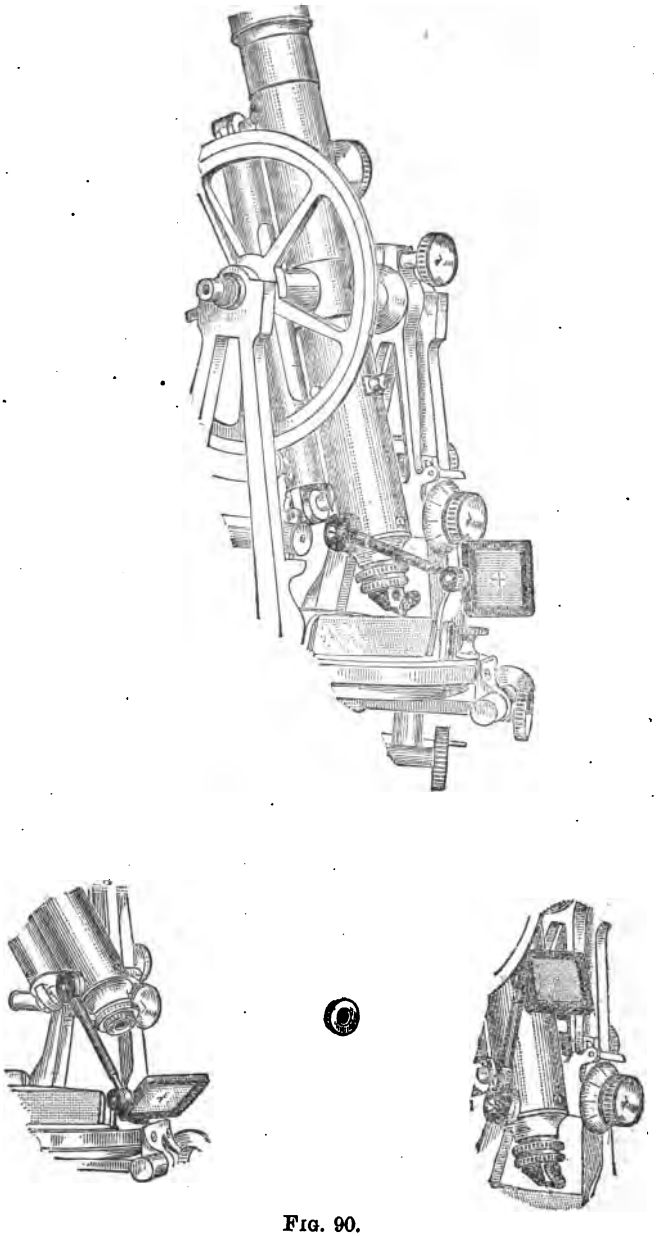


FIG. 90.

Es sabido que si se frota una aguja de acero templado contra un imán, adquiere de una manera duradera las propiedades magnéticas; entre ellas la de tomar, cuando se la suspende libremente por su centro de gravedad, una dirección determinada, que puede considerarse como fija en un lugar y momento dados.

Dijimos ya que el ángulo formado por el plano que contiene el eje de la aguja, con el plano meridiano, se llama ángulo de declinación ó simplemente *declinación* y añadiremos que el que forma el mismo eje con la horizontal se llama *inclinación*. Este último ángulo no tiene que ser considerado en nuestro estudio, pues en los instrumentos topográficos se dispone la aguja horizontal, poniéndole un contrapeso en su parte austral que es en nuestro hemisferio la más elevada.

Observemos solamente que la inclinación crece del ecuador hacia los polos, y por lo mismo, al cambiar de latitud, puede ser necesario desalojar el dicho contrapeso para obtener la horizontalidad de la aguja.

Cuando ésta se separa de la dirección de la meridiana, después de algunas oscilaciones llega al reposo y toma la dirección antes expresada, con más ó menos rapidez, según circunstancias varias que no tenemos aquí lugar para exponer; sólo es oportuno recordar que Gambey descubrió en 1824, que la aguja vuelve al reposo mucho más rápidamente cuando está suspendida encima y muy cerca de una masa de cobre. Este fenómeno tiene su aplicación en la construcción de las brújulas topográficas, que se construyen generalmente con este metal ó latón.

La declinación cambia con el lugar y la época.

Se distinguen: la variación geográfica, la variación secular, la variación diurna, las perturbaciones locales y las perturbaciones accidentales. Estudiémoslas sucesivamente.

150. *Variación geográfica.*—Un gran número de observadores han medido las constantes magnéticas del globo (entre ellas la declinación) y coordinando los resultados de las

observaciones se ha deducido el estado magnético de la superficie terrestre empleando para ello dos vías diferentes, una sintética propuesta por Euler y la otra analítica desarrollada por Gauss.

Euler propuso asimilar la tierra á un imán de pequeñas dimensiones relativas, cuyo medio coincida con el centro del globo y cuyo eje prolongado hasta la superficie terrestre la encuentre en dos puntos diametralmente opuestos que se llaman polos magnéticos y los que poco distan de los polos verdaderos.

El círculo máximo perpendicular á la línea de los polos se llama por analogía ecuador magnético; los círculos menores paralelos al ecuador, paralelos magnéticos, y los círculos máximos que pasan por los polos, meridianos magnéticos.

En esta hipótesis, los polos magnéticos deben tener coordenadas geográficas de igual valor numérico; en ellos la aguja sería vertical y la de declinación se dispondría en equilibrio en todas direcciones; en el ecuador la inclinación sería nula y en cada paralelo constante, y en cada meridiano la declinación no variaría. Entre estos meridianos habría dos que contendrían á la vez los dos ejes (terrestre y magnético) y en los cuales se confundiría la dirección de la aguja con la del meridiano verdadero.

Veamos si estas diversas circunstancias se realizan en el globo terrestre. Duperrey ha ejecutado el trabajo de resumen de numerosas observaciones y su resultado ha sido el siguiente:

La posición de los polos magnéticos es: para uno:

$$70^\circ\, 5' \text{N.} \quad \text{y} \quad 90^\circ\, 12' \text{O.}$$

y para el otro:

$$75^\circ\, 20' \text{S.} \quad \text{y} \quad 130^\circ\, 10' \text{E (1)}$$

(1). Las longitudes todas que damos en el estudio de las variaciones, se refieren al meridiano de Paris. Las posiciones de los polos y nodos son variables con el transcurso del tiempo.

esto es, que no corresponden á las extremidades de un diámetro.

El ecuador magnético, así como los paralelos, no tiene la regularidad de un círculo y corta al ecuador terrestre en dos puntos, llamados nodos, que tienen respectivamente de longitud: uno 30° 20′ E., y otro, menos bien determinado, se encuentra entre 166° 25′ O. y 175° 44′ E. El plano medio de esta curva forma un ángulo de 10° 49′ con el del ecuador. El ecuador magnético hipotético no se ve realizado.

Las curvas determinadas uniendo entre sí los puntos de igual declinación (líneas isogónicas), no forman círculos máximos, ni siquiera curvas planas, pero no son, sin embargo, de una gran irregularidad.

La teoría de Gauss es independiente de toda hipótesis sobre la distribución del fluido en el interior del globo, ha establecido que existen superficies llamadas de nivel, que tienen por normal, en cada uno de sus puntos, la dirección de la aguja imanada libremente suspendida por su centro de gravedad; cortan la esfera terrestre según una serie de curvas cerradas que se llaman paralelos magnéticos; siendo dos de estas superficies tangentes al globo en los polos magnéticos.

Los meridianos magnéticos pasan siempre por los polos magnéticos, y según aquéllos se orienta la aguja.

La variación geográfica está muy lejos de ser despreciable; en Francia, para una extensión en longitud de 12°, la diferencia de declinaciones es de 6° (entre Brest y Nice).

En los Estados del Este de la Unión Americana la declinación es occidental y oriental en los del Oeste, pasando la línea sin declinación el año de 1840, según Loomis, por la parte N.W. del lago Huron, siguiendo por medio del lago Erie, ángulo S.W. de Pennsylvania, partes centrales de la Virginia y á través de North Carolina hasta la costa. Esta línea se desaloja lentamente hacia el Oeste, y por consiguiente, las declinaciones W. van en aumento y las E. en diminución. La marcha de este incremento ó decremento se esti-

ma, por término medio, en 2′ al año para los Estados del Sur, 4′ para los del centro y del Oeste y 6′ para los de Nueva Inglaterra.

La diferencia de declinaciones entre el Maine y el Oregón alcanza á 39°. (1)

Según la carta magnética formada por Diaz Covarrubias para la República prolongando los meridianos magnéticos observados en los Estados Unidos, la diferencia de las declinaciones extremas es de unos 5°, siendo de 7° al Oriente en Yucatán y 12° al mismo rumbo en la parte Norte de la Baja California.

En la carta magnética del Almirantazgo inglés para 1871, el territorio de la República Mexicana resulta estar comprendido entre las líneas isogónicas de 6° y 13° E. La primera pasa por el Mar de las Antillas, corriendo del S.S.E. al N.N.W., atraviesa el canal de Yucatán, penetra en el Golfo de México, inclinándose al N. y cruza la costa al E. de Mobila. La isogónica de 13° viniendo del Pacífico con rumbo E. ¼ N.E., encuentra la península de la Baja California al Sur de la Bahía de Todos Santos, y penetra al continente recurvando al N.E. Las líneas intermedias afectan una dirección sensiblemente normal al eje de figura del área ocupada por la República, siendo de notar que las isogónicas de 8° y 9° distan más entre sí que las otras líneas de igual declinación que, variando de grado en grado, continúan surcando el territorio mexicano al N.W. de San Blas; por consiguiente, desde Minatitlán hasta Matamoros en la costa del Golfo, y desde Salina Cruz hasta San Blas en el Pacífico, son cortas las variaciones de la declinación por el cambio de posición geográfica, cuando se hace abstracción de la influencia de las causas locales. Es digno de observar que, en el Pacífico, las isogónicas de 8°, 7°, 6° y 5° y las de menor declinación oriental, forman un sistema de curvas cerradas y concéntricas, exis-

(1). W. Gillespie, Treatise on Land Surveying, pág. 200.

tiendo sobre el ecuador y hacia los 135° de longitud W. de Greenwich una pequeña región sin declinación. (1)

151. *Variación secular.*—La declinación sufre además una variación en cada lugar que es muy importante considerar, pues referidos los rumbos al meridiano magnético en cierta época, no serán ya correctos en otra diferente. Esta variación es la secular, que consiste en el cambio continuado del ángulo de la aguja con el meridiano.

Así por ejemplo, en Paris la declinación en 1580 era de 11° 30′ E.; decreció hasta cero en 1663 y luego fué progresivamente aumentando hacia el Oeste hasta llegar á un máximun de 22° 34′ en Octubre de 1814 para disminuir á 16° 33′ en 1883, último año del que tengo datos. (2)

Actualmente la declinación en Paris disminuye cosa de 6′ por año, y como se ve, está muy lejos de ser despreciable semejante variación.

Dimos hace poco los datos de la variación secular en los Estados Unidos y de buena gana habríamos añadido los de nuestro país, pero las observaciones necesarias para determinar la variación escasean y están muy dispersas. Sería materia de un trabajo especial el ordenar y discutir los datos que merezcan confianza para dar una idea del trazo de los meridianos magnéticos en México, llevando los resultados observados á una misma época por la previa determinación de la variación secular.

No siéndome posible emprender ese estudio, doy sólo á título de indicación, que puede tener utilidad, la tabla de declinaciones que va al fin de este volumen.

En el trabajo del Sr. Ingeniero V. Reyes ya citado, de la página 13 á la 16 se lee lo que sigue:

"En la porción del continente americano que ocupa la República, apenas han sido observados los elementos magnéti-

(1). Memoria sobre el Departamento magnético del Observatorio Meteorológico Central de México por V. Reyes, pág. 10.

(2). Annuaire de l'Observatoire de Montsouris 1883.

cos de tarde en tarde, y no siempre de una manera metódica y continuada; en las costas es tal vez donde mejor se ha estudiado la declinación, y esto merced á las exploraciones de las oficinas hidrográficas extranjeras; en el Valle, los primeros trabajos sobre la declinación, dignos de fe, se practicaron en 1775 por D. Joaquín Velazquez de León; el ilustre Humboldt determinó más tarde la declinación de varios lugares de la entonces Nueva España, en su célebre viaje, y posteriormente algunos ingenieros se han ocupado de este género de observaciones; mas desgraciadamente los resultados obtenidos son poco conocidos, existen dispersos en diversas obras, han sido determinados en épocas distintas y son insuficientes para trazar con alguna seguridad el curso de las líneas isogónicas sobre la carta de la República.

Hablando de las observaciones hechas en el Valle sobre la declinación, dice el Sr. Orozco y Berra: (1) "El Ingeniero Iglesias, que practicó sus observaciones con un transit americano, obtuvo en 1862 una declinación E. de 8° 34′ 50″.

"Aunque hemos buscado no hemos podido haber á la mano datos antiguos que pudieran informarnos de la cantidad y del rumbo que han seguido las variaciones seculares de la aguja en México. Faltan, para tiempos pasados, observadores de quienes se pudiera confiar; y por otra parte, cierta clase de estudios, ni han sido emprendidos, ni fueron estimados sino de algunos años á esta parte. He aquí lo que encontramos:

	OBSERVADORES.	Declinación al E.		
1775.	Velázquéz de León	6°	42′	00″
1804.	Humboldt	8	8	00
1849.	Gómez de la Cortina	8	30	12
1857.	Dr. Sonntag	8	46	5
1858.	Almazán	8	22	18
1860.	Salazar Ilarregui	8	30	00
1862.	Iglesias	8	34	50

(1). Memoria para la carta Hidrográfica del Valle de México, 1864, página 35.

"Las observaciones metódicas emprendidas en el Colegio de Minería, podrían enseñarnos alguna cosa, si los resultados finales hubieran visto la luz pública; á nuestro conocimiento no han llegado más de las relativas al período corrido de 11 de Mayo á fin de Julio de 1857 que, como de luego á luego se comprende, así aislados son datos truncos de los que no debe sacarse conclusión alguna. Resulta de ellos que el 12 de Mayo la declinación era de 8° 50′ 15″ á las siete de la mañana, aumentada á 8° 56′ 55″ á las seis de la tarde; la desviación creció el 14 hasta 9° que disminuyó durante el día, y desde las seis de la tarde del 15, que se observaron 9° 20′ 55″, la aguja se mantuvo avanzando y retrocediendo hasta el 18 de Junio á las doce de la mañana, que volvió á señalar 8° 55″. Retornó á 9° el 25 y se mantuvo así hasta el 5 de Julio en que dió á las nueve de la mañana 8° 31′ y así permaneció con poco más ó menos hasta el fin de aquel mes."

En otra de sus obras, (1) el mismo autor inserta los apuntamientos que le fueron suministrados por el Sr. Ingeniero Ignacio Cornejo, acerca de las observaciones meteorológicas y magnéticas que practicó en la Escuela de Minas durante el año de 1866, y cuyos resultados ponen de manifiesto que en el año á que se ha hecho referencia, la inclinación de la aguja magnética, varió entre 45° 20′ y 43° 40′ oscilando la declinación entre 8° 8′ 47″ y 7° 56′ 27″.

"Las observaciones magnéticas, dice el Sr. Cornejo, aunque en menor número que las otras (las meteorológicas) merecen entera confianza. Cuento para la declinación con una brújula de variaciones horarias del sistema de Gambey, construída por Secretan y dividido el limbo en grados sexagesimales, con aproximación de diez en diez segundos. La aguja queda encerrada en una caja y libre de las agitaciones del aire, y como está suspendida por el medio, es muy sensible á toda fuerza que la solicita."

(1). Memoria para el Plano de la Ciudad de México.

"Examinados atentamente los valores que se han apuntado para la declinación, no se descubre entre ellos una relación determinada para la variación secular; pues aunque la diminución ó aumento gradual de la desviación de la aguja magnética no tiene lugar de una manera constante en determinado sentido, porque la oscilación secular general se halla subdividida en ciclos menores de diez á once años, probablemente relacionados con el ciclo de las variaciones de las manchas solares; empero, el movimiento general en los dos primeros tercios del siglo, no acusa una tendencia á un decremento ó un incremento de la declinación. Así, comparados los resultados que obtuvo Humboldt en 1804, con los del Conde de la Cortina en 1849, aparece que en ese lapso la declinación experimentó un incremento de 29″.6 al año; de 1849 á 57 la variación anual está representada por + 1′ 59″; de 1857 á 58 hay la fuerte diferencia de 23′ 47″, que corresponde á un excesivo decremento, tornándose éste después en incremento de 3′ 51″ por año, de 1858 á 60, y 2′ 25″ de 1860 á 62."

Estas discrepancias, en extremo sensibles, reconocen, entre otras causas, por origen: 1ª El no haberse hecho uso de los mismos instrumentos, ó por lo menos la falta de comparación de los nuevos con los antiguos, para llevar en cuenta sus diferencias, refiriendo á los más perfectos las declinaciones obtenidas en diversas épocas. 2ª El no haberse practicado tal vez las observaciones en una misma época de los años, para eliminar la influencia de las variaciones anuales, pues puede muy bien haber acontecido que los datos de un observador se refieran á la época de la máxima y los de otro á la de la mínima. 3ª El haber acaso coincidido el tiempo en que se hacía una observación con la ocurrencia de alguna perturbación magnética notable, en virtud de la cual las indicaciones de la aguja debieron apartarse mucho de su valor normal. 4ª El no haberse ejecutado las observaciones en el mismo punto, para que fueran constantes los errores motivados por

las influencias locales, á las que no es fácil substraerse completamente cuando el observador se encuentra rodeado de construcciones en el centro de las grandes ciudades.

152. *Variación diurna.*—Si se observa un día entero la aguja imanada se notan en ella oscilaciones al rededor de la posición media, que siguen más ó menos regularmente en cada lugar el tiempo local y parecen depender de la influencia del sol. Estas son las variaciones diurnas.

La punta de la aguja más próxima al sol verifica sus oscilaciones de la manera siguiente: su mayor desviación occidental tiene lugar cuatro ó cinco horas antes del paso meridiano del sol; marcha en seguida hacia el Oriente con una velocidad creciente que alcanza su máximum en el instante del paso del sol por el meridiano magnético. Una ó dos horas más tarde tiene lugar la mayor desviación oriental; la aguja vuelve en seguida al Occidente hasta la puesta del sol. Durante la noche se produce una oscilación semejante pero de menor amplitud. (1)

Estas variaciones no son constantes para cada lugar, sino variables con la época del año, siendo mayores en el verano que en el invierno.

Las oscilaciones diurnas no son susceptibles de expresarse en una fórmula que permita calcular con precisión el valor de la declinación á una hora dada para llevar en cuenta la corrección correspondiente.

En Francia la separación entre las posiciones extremas del día es de 8′ á 9′ en invierno, y de 13′ á 15′ en el verano; (2) y en ciertos climas alcanza á 25′ ó 30′.

Como se ve, están lejos de ser despreciables estas diferencias.

153. *Perturbaciones accidentales.*—Además de las variaciones ya citadas, está la aguja sometida á perturbaciones que

(1). A. Pelletan. Traité de Topographie, 1893, pág. 24.
(2). Jamin. Cours de Physique, tomo 4º

no se deben á causas locales y pueden en ciertos momentos desviarla notablemente de su posición media: son las llamadas tempestades magnéticas.

Estas tempestades se producen á intervalos irregulares y su influencia se hace sentir simultáneamente sobre puntos del globo muy alejados entre sí; son, pues, independientes de circunstancias locales.

Parece establecido que la aparición de estos fenómenos coincide con la de ciertos fenómenos meteorológicos, con la de las manchas solares, auroras boreales, etc, pero en todo caso durante ellos se perturban grandemente las observaciones, y deben rechazarse las efectuadas al tiempo del paso de las tempestades magnéticas. En Europa ciertos periódicos avisan al público la fecha en que se realizó uno de estos fenómenos para desechar las observaciones hechas durante su verificación.

154. *Perturbaciones locales.*—Independientemente de las perturbaciones generales, la brújula está sujeta á otras puramente locales; la presencia de la magnetita, de la pirita de fierro magnética y de ciertas rocas eruptivas produce desviaciones de amplitud ilimitada. (1)

Esta causa impide totalmente el uso de la aguja en ciertas regiones y en el interior de minas que contienen rocas de acción magnética apreciable.

Es también de temerse la influencia de las masas de fierro, acero, etc., que entran en ciertas construcciones y en las vías férreas. (2)

(1). Se ha observado una desviación de 60° en Bossullack, Cornouaille. Pelletan, obra citada, páginas 27 y siguientes.

Mr. Baudoin en el río Oust, observó variaciones de la declinación que llegaban á 6° para un desalojamiento de 150^{m} y aun de 1° para un desalojamiento de 5^{m}. Excavaciones hechas en los lugares en que la desviación era más sensible no hicieron descubrir, en la naturaleza del suelo, nada que pudiera explicar estas anomalías. Goulier, obra citada, pág. 218.

(2). Levantando el perímetro de los "Baños Pane," en México, tuve una desviación de 10° en una estación inmediata al Depósito de los wagones del Circuito de Baños donde hay varias vías férreas.

Experiencias de Combes han mostrado que los rieles colocados en el interior de las galerías subterráneas están polarizados y toman una imanación permanente, tanto más grande cuanto se aproxima más su dirección á la del meridiano. Hé aquí el resultado de algunas observaciones.

Rieles colocados en la dirección del meridiano magnético.

Distancia de la brújula á los rieles.	Altura de la brújula sobre el riel.	Ángulo leído en la brújula.
6m.00 hacia un lado de los rieles	1m.48	80° 00′
1 .60 „ el mismo lado.....	1 .20	83 30
Sobre el primer riel.....	1 .10	83 15
Entre los dos rieles	1 .10	83 30
Sobre el segundo riel.....	1 .10	83 45
2m más allá de éste	1 .10	83 30

Rieles colocados en una dirección perpendicular.

4m.00 hacia un lado de los rieles.....	329° 45′
Sobre el primer riel.....	328 00
Entre los dos rieles	330 00
0m.58 más allá del segundo riel.....	328 30

Estas cifras enseñan que la desviación es importante pero no ponen de manifiesto la ley de la desviación. El Profesor Junge, de experiencias hechas en Freiberg, deduce las conclusiones siguientes:

1ª Dos rieles idénticos como peso y dimensiones pueden tener una acción diferente sobre la aguja. Ha llegado á acontecer que la desviación producida por el uno sea doble de la producida por el otro. Por lo tanto, no puede contarse con que se compensen las influencias de dos rieles colocados paralelamente. No basta, como algunos lo creen, colocarse en el centro de la vía para anular dichas influencias.

2ª La influencia es máxima cuando los rieles tienen un azimut magnético comprendido entre 45° y 60° 30′, la desviación decrece en seguida hasta que el ángulo del riel con el meridiano es de 90°; para este ángulo la desviación es intermedia entre la máxima y la observada cuando el riel forma un ángulo de 22° 30′ con el meridiano.

3ª La influencia es mayor, cuando la brújula está colocada directamente encima del riel.

Las perturbaciones de la clase que venimos considerando tienen, como se ve, una gran importancia, y de lo expuesto se deduce que no deben hacerse observaciones con brújula en una galería donde haya una vía férrea, ni á inmediaciones de una de éstas últimas.

Es también necesario alejar del instrumento las fichas, resortes ó cadenas de acero que alteran la dirección de la aguja.

Para reconocer si un terreno tiene influencia magnética, se traza en él una línea recta que se señala por varias estacas alineadas por un visador. Se toma el azimut de la línea desde su extremo, y luego, colocándose en cada estaca se vuelve á tomar el azimut, visando la más lejana hacia uno y otro lado del punto de estación. Si las discordancias de los azimutes exceden de los errores inevitables de observación, se debe concluir que el terreno es magnético. Conviene repetir la operación sobre varios alineamientos orientados diferentemente.

155. La brújula es muy empleada en el interior de las minas, y para justificar su aplicación en esas condiciones, es importante asegurarse de si la declinación tiene el mismo valor en el fondo de una mina y en la superficie del suelo. Experiencias ejecutadas en Clausthal en dos observatorios, establecidos, uno en la superficie y otro á 525 metros de profundidad, han demostrado que las variaciones de la declinación, son simultáneas y de la misma amplitud y que la concordancia de dichas variaciones existe tanto en la marcha general como en los menores detalles del fenómeno. Igual resultado se obtuvo en las experiencias hechas con el mismo fin en Pribram á una profundidad de 1000^{m} y con instrumentos de la mayor precisión.

156. Del estudio hecho se deduce que el fenómeno del magnetismo terrestre no es tan constante y bien definido, como

por ejemplo, el de la gravedad, y por lo tanto, de aquél no podemos obtener para la orientación una precisión tan grande como la dada por el segundo para determinar la posición del plano horizontal; pero afortunadamente la orientación absoluta de los ejes coordenados no tiene gran importancia en la práctica de la topografía. La mayor parte de las veces la orientación es innecesaria, y cuando se desea conocer su valor, la exactitud dada por la aguja es suficiente en general.

Para los trabajos que requieren el exacto conocimiento de este elemento, es preciso recurrir á métodos astronómicos de minuciosa aplicación, cuyo desarrollo no es de este lugar, y de uno de los cuales dimos idea al hablar del "solar compass," que da mejores resultados que la aguja imanada, en cambio de alguna mayor dificultad en su uso.

Declinatorio magnético.

157. Este es un aparato que evidencia el fenómeno de la orientación de la aguja imanada, y consiste en una de éstas, suspendida libremente por su medio para que se disponga en el espacio obedeciendo á la sola acción de la fuerza magnética y en cuya posición el eje de aquélla marca la dirección de la resultante de la fuerza atractiva.

En una aguja se distinguen dos *ejes*, el *de figura* y el *magnético* que no es otra cosa que la citada dirección de la resultante. En general, los ejes no coinciden en una sola línea.

Un declinatorio consiste en una aguja imanada suspendida de un hilo sin torsión ó apoyada sobre una punta de acero por medio de una chapa de ágata, zafiro, acero ú otra substancia muy dura, para disminuir el rozamiento y permitir el libre movimiento de la aguja.

En los instrumentos topográficos, la última disposición es la usada (fig. 91), y como antes advertimos se hace más pesada una de las mitades de la aguja (la del Sur en nuestro hemisferio) para anular el efecto de la inclinación. General-

mente se consigue este resultado enrollando un alambre delgado de latón sobre la aguja, el cual se puede desalojar al cambiar la inclinación magnética por el cambio de latitud del lugar de observación.

Las condiciones principales de una aguja son: intensidad de su fuerza directiva y sensibilidad.

Ciertas clases de acero, como el empleado en la cuchillería, son más capaces para recibir gran fuerza magnética. La forma de la aguja también influye sobre este factor y la mejor es la de losange ó rombo. Más allá de cierto límite, digamos 12 centímetros, no se obtiene poder adicional aumentando la longitud de la aguja, sino que, por el contrario, en las más largas la fuerza puede verse disminuída por la formación de polos secundarios formados en ellas.

La segunda condición, la de sensibilidad, depende del mayor ó menor rozamiento de la chapa y pivote. Una y otra condiciones hacen que la aguja tarde más ó menos en llegar al reposo. Si se alcanza muy pronto, ó la aguja está débilmente imanada ó el rozamiento de la chapa es muy grande.

La falta de fuerza magnética puede remediarse imanando nuevamente la aguja por los medios bien conocidos para hacerlo, y el rozamiento se disminuye limpiando la chapa y afilando el pivote que suele embotarse con el uso.

A veces se encuentran ocultas partículas de fierro en la masa del metal de que está construído el instrumento que lleva la aguja, lo cual falsea sus indicaciones. El constructor debe asegurarse de si existe ó no este defecto en los instrumentos que fabrica y el ingeniero debe también investigarlo valiéndose del método explicado en el capítulo "Brújula" de la 4ª Parte.

Otra causa de error en el uso de la brújula, proviene de la electrización de la cubierta de vidrio de la aguja, que después de limpiarse con un lienzo ó frotarse de cualquier otro modo, atrae uno de los extremos de la aguja haciéndolo adherir contra el vidrio y girar con él. Cuando esto suceda, debe des-

cargarse el vidrio tocándolo en varios puntos con un dedo humedecido.

UTILIZACIÓN DEL MAGNETISMO DE LA AGUJA—BRÚJULA.

158. El problema práctico de la utilización del magnetismo consiste en fijar la dirección del eje magnético de la aguja imanada. Supongamos que un declinatorio funcione como alidada magnética y esté arreglado de tal modo que el plano visual pase por el eje magnético; evidentemente desde una estación será fácil fijar, mediante señales, la dirección del meridiano magnético, la cual será constante, mientras lo sean los elementos de la fuerza directriz.

Si cambiamos de estación y repetimos en la nueva la operación hecha en la anterior, habremos fijado una dirección que será (dentro de los dichos límites) paralela á la primera (1). Así pues, si colocamos en el centro de una caja cilíndrica una aguja imanada cuyo eje apoye sobre el pivote central y trazamos una graduación angular, cuyo centro sea el de la caja, y si, según un diámetro de ésta, disponemos las pínulas ó el telescopio que hayan de servir como visadores, habremos construído un goniómetro ó medidor de ángulos magnético.

En efecto, si aprovechando el plano de mira visamos diversos puntos del espacio, evidentemente la extremidad de la aguja que permanece marcando una dirección fija, señalará sobre la graduación los arcos correspondientes á las varias posiciones del plano visual, esto es, los ángulos que forma sucesivamente con el meridiano magnético ó sean los *azimutes magnéticos* de las direcciones observadas, y la dirección de los ejes coordenados estará determinada.

Las diferencias entre los azimutes serán lós ángulos comprendidos entre los planos verticales que contienen las visuales, y de este modo la aguja viene á constituir la parte fun-

(1). Hay que recordar además de las perturbaciones, que los meridianos magnéticos son también convergentes.

damental del goniómetro llamado *brújula*, cuya descripción se hará en la Cuarta Parte de este libro, pues en la presente se estudia como medio para orientar un plano vertical. Allí estudiaremos la exactitud que puede esperarse de la brújula en la medida de los ángulos y en la orientación de los planos coordenados, las que, en resumen, están sometidas á dos causas de error: 1ª La poca precisión de las lecturas de la graduación: por la pequeñez de las divisiones, por el espesor, siempre grande en relación con las divisiones, de las puntas de la aguja, por la distancia que hay forzosamente de la punta á la graduación para que la aguja se mueva libremente, por defectos de coincidencia entre los ejes de figura y magnético, etc., y 2ª Las diversas variaciones secular, diurna, accidental, local, etc., de que nos hemos ocupado.

159. La línea de los ceros, ó la línea 0°–180° de un círculo dividido, se orienta igualmente empleando una aguja magnética que en este caso no es la parte fundamental del goniómetro mismo, sino un auxiliar de otro más perfecto, como pasa con las brújulas de los universales que tienen un papel secundario, usándose para conocer en ciertos casos el azimut de una línea (pero no para medir los ángulos formados por las visuales) y los azimutes de las demás se deducen, no de nuevas lecturas de la aguja, sino de las hechas en el círculo dividido del instrumento, alcanzándose mayor exactitud en los ángulos, si bien el error inicial de orientación no queda eliminado. (1)

La condición que sirve de base al empleo de este método, es que el eje magnético (coincidente con el de figura naturalmente) sea paralelo al diámetro del cero de la graduación del círculo, y así al colocar el instrumento en cada estación se parte de una dirección constante para la medida de los azimutes. Si ahora hacemos que el eje de la aguja no sea paralelo á la línea del cero, sino que forme con ella un ángulo

(1). Véase Capítulo "Instrumentos topográficos universales".

igual al de la declinación, las lecturas serán los azimutes verdaderos de las líneas, obtenidos con el grado de aproximación que puede esperarse de la brújula. Es disposición común en los instrumentos americanos y que simplifica los cálculos, la de permitir el que la línea de los ceros corresponda al valor de la declinación por medio del desalojamiento de un círculo concéntrico con el graduado, y dividido también en una parte de su extensión.

La figura 92 representa el círculo de un goniómetro á cuya cara inferior está aplicado un orientador magnético muy sencillo; consiste en una cajita de sección rectangular en la cual se encuentra la aguja en equilibrio y señala en dos arcos graduados la posición del eje magnético. En el medio de cada arco y sobre la línea que pasa por el pivote central, se hallan los ceros ó línea Norte–Sur señalada con las iniciales N. y S.

Supongamos que la recta C C′ que pasa por el centro del círculo represente la traza del plano de colimación de un visador (pínulas, anteojo, etc.) con el plano de la figura y la recta 0^G–200^G (1) la de los ceros de los vernieres A y B.

La posición relativa de las rectas N. S., C C′, 0^G–200^G, siendo arbitraria, el constructor puede disponerla de modo que cuando los índices de la alidada correspondan al diámetro 0^G–200^G, las líneas C C′ y N.S. sean paralelas entre sí. Hecho esto, será evidente que cuando por la rotación del círculo graduado se obtenga que el eje de la aguja se encuentre precisamente en la dirección N.S. y llevado el plano de colimación á una posición tal que se lean en los vernieres 0^G y 200^G, el plano de colimación será el mismo meridiano magnético.

Fácilmente se comprende cómo también será posible al constructor disponer las rectas C C′ y N S. de modo que cuando estén los índices en 0^G y 200^G formen las dichas lí-

(1). El círculo en el ejemplo está dividido en 400 grados. Para expresar grados de la división centesimal, usamos la letra G en vez del signo °.

neas entre sí un ángulo igual y contrario á la declinación magnética y las medidas angulares tendrán su origen, no ya sobre el meridiano magnético sino sobre el verdadero; pero como la declinación varía con el lugar, la época, etc., es mejor la primera disposición y se hace en seguida la corrección numérica á los azimutes observados.

Notemos, antes de seguir adelante, que al cambiar de estación, no es posible contar con que en la nueva sea la línea de origen exactamente paralela á la de la estación anterior, no sólo por la convergencia de los meridianos, sino por la inexactitud de las lecturas hechas con la aguja, la cual es varias veces mayor que la aproximación del círculo graduado del instrumento.

Si en una estación A se visó la B y se obtuvo por azimut de la línea un valor a, al pasar á B debe leerse como azimut de B A (que se llama también *azimut inverso* de A B):

$$a' = a \pm 200^G \quad \text{.....} \quad (1)$$

cuya condición de no verificarse, indica que las rectas de origen no son paralelas. No es de este capítulo la exposición del método que se sigue para transportar la orientación de una á otra estación, siempre paralelameute á sí misma, pero nótese que si al visar de B á A no se verifica la condición (1) en los límites de aproximación que da la lectura de la aguja, debe investigarse si hay alguna causa anormal de perturbación: masas de fierro, etc.

160. La figura 93 en proyecciones vertical y horizontal, representa un orientador magnético cuya aplicación veremos en la 4ª Parte.

La aguja está colocada dentro de un tubo cerrado en ambos extremos; en uno por una lente L y en otro por una lámina delgada de marfil N sobre la que está trazada una graduación de partes iguales.

La aguja lleva en su extremidad una punta i que el obser-

vador colocado en L ve agrandada, así como la escala de marfil. La figura 94 representa este efecto óptico.

El observador dispone el instrumento orientado aproximadamente, la punta i aparece oscilando frente á la escala y cuando girando el instrumento se coloca la punta en la división central ó sigue oscilando arcos iguales á los lados de ésta, se habrá orientado por completo. Girando el anillo a se levanta una palanca l y paraliza el movimiento de la aguja. Es posible mover el eje N. S. para rectificar el paralelismo de la línea de los ceros, por medio de los tornillos V V.

La figura 95 representa la disposición del orientador de los cleps. La aguja, lente ocular, escala y anillo son iguales á los descritos en el párrafo anterior; pero como se ve en la figura, un pequeño disco graduado está centrado en la parte alta de un perno hueco que presenta en su parte inferior un cilindro de mayor diámetro en el cual se halla colocado el orientador ó declinatorio magnético. Este se dispone por el constructor de manera que cuando el índice i marca el centro de la graduación correspondiente, la línea 0^g–200^g del círculo está orientada, es decir, es paralela á la Norte–Sur.

Se construyen también declinatorios portátiles que se aplican á los instrumentos, fijándolos en ellos ó bien enteramente libres como en la plancheta.

Declinatorios magnéticos más delicados, como los de reflexión que Porro usó mucho, ya no se emplean actualmente, fundándose en la inutilidad de obtener visuales orientadas con una precisión que es ilusoria, por el gran valor relativo de las oscilaciones diurnas.

CAPÍTULO VIII.

De la situación del origen sobre la vertical.—Altura sobre el nivel del mar.

Barómetros.

161. El plano geodésico fundamental es el tangente á la superficie de las aguas del mar, supuesta prolongada bajo los continentes y como los levantamientos topográficos se ejecutan siempre á cierta elevación sobre dicho plano tangente, será necesario determinar esa elevación para conocer la posición del origen de coordenadas en los casos que este dato sea de algún interés, aun cuando lo más común es que no lo tenga para el Ingeniero, quien en general más bien necesita conocer la diferencia de altura entre los varios puntos del terreno que mide, para proyectar obras de regadío, vías férreas, carreteras, etc., y pocas veces quiere averiguar su altitud sobre el nivel del mar ó sea la altura absoluta. Este último dato es, sin embargo, de importancia en muchos casos, y particularmente en nuestro país por la especial configuración de su suelo.

Daremos en este capítulo la descripción de los instrumentos que permiten conocer la altura del lugar de observación sobre el nivel del mar.

Para este objeto se emplea el barómetro, instrumento que da la medida de la presión atmosférica en un determinado momento para deducir por cálculos apropiados la distancia del lugar de observación al punto en que su vertical encuentra la superficie ideal del elipsoide terrestre. Este caso de medida indirecta nos sirvió de ejemplo en el Capítulo I, y allí apuntamos que de la diferencia de presión atmosférica en dos lugares se deduce su diferencia de altura. Si uno de los puntos de observación está al nivel del mar, la diferencia de

altura será la altura *absoluta* del otro punto; pero si el primero no se encuentra á una elevación nula, la diferencia de alturas será la altura *relativa* de los puntos de observación.

Este valor no es otra cosa que la coordenada vertical **z**, la cual también puede conocerse: (**a**) por la aplicación de fórmulas á los valores dados por observaciones hechas con los instrumentos medidores de ángulos verticales descritos en la Cuarta Parte, ó bien, (**b**): por la medida directa de las diferencias **Z**, de las coordenadas verticales (*nivelaciones trigonométrica y topográfica respectivamente*).

Vemos, por lo tanto, que el barómetro sirve para dar, no sólo la altura del origen sobre el plano fijo de comparación, sino también el valor de las coordenadas verticales y bajo este punto de vista debe considerarse entre los instrumentos topográficos, ya que con su ayuda se ejecuta una tercera clase de nivelación: *la barométrica.*

Así, puede decirse que la determinación de la altura relativa es un caso particular del de la determinación de la absoluta; aquel en el cual se busca la diferencia de las alturas absolutas de dos puntos que ocupan niveles diferentes de cero, y siendo así, á la vez que estudiaremos el punto que en rigor forma el objeto del presente capítulo, consideraremos el barómetro como instrumento propio para dar la diferencia de alturas entre los varios puntos de un levantamiento.

Más adelante examinaremos en qué casos se aplica la nivelación barométrica de preferencia á la trigonométrica y topográfica, pero siendo necesario para hacer ese estudio comparativo, conocer el límite de aproximación que puede esperarse del barómetro, analizaremos previamente su teoría, construcción y modo de empleo.

162. *Fundamento del barómetro.*—Es un hecho conocido que la presión atmosférica va disminuyendo gradualmente de la superficie de los mares hacia los límites de la atmósfera; y por consecuencia, suponiendo constantes las condiciones atmosféricas de humedad, temperatura, etc., la presión en un

punto es proporcional á la altura de la columna de aire que sobre ese punto gravita. Variando las condiciones de temperatura, humedad, ó movimiento del aire, varía su densidad y la presión cambia en un mismo lugar.

Para conocer dicha presión se mide la altura de la columna de mercurio que la hace equilibrio, y la cual, con una cubeta, constituye el instrumento llamado *barómetro de mercurio.*

Conocidas las alturas de la columna de mercurio en dos estaciones, su diferencia nos dará un dato para calcular la diferencia de niveles, con una precisión cuyo límite depende de la aproximación con que pueda medirse el peso del aire por el barómetro; pero en la práctica el fenómeno que se observa es más complexo, no sólo por los cambios meteorológicos de la presión atmosférica de que hablamos poco há, sino por la variación de la acción de la gravedad con la latitud geográfica y con la distancia del lugar de estación al centro de la tierra. Así pues, preciso será llevar en cuenta estos varios factores; pero como los que llamaremos meteorológicos entre sí se influencian de una manera complicada, no es posible obtener una fórmula exacta que abrace sus efectos, y por consecuencia, el método de nivelación barométrica tendrá un límite de precisión mucho menor del que hubiera sido dable alcanzar satisfecha la condición teórica del uniforme decrecimiento de la presión atmosférica al aumentar uniformemente la altitud.

Observemos, además, que los cambios de temperatura ejercen su acción, no sólo sobre el aire, sino también sobre el mercurio de la columna barométrica dilatándola ó contrayéndola y haciéndola, por tanto, variar de densidad. De aquí la necesidad de usar como complemento del barómetro, termómetros que nos den las temperaturas del aire y del mercurio.

Por último, influye también en la exactitud de la medida

el efecto de la capilaridad sobre el mercurio en el tubo del instrumento.

163. *Fórmulas barométricas.*—Alargaríamos demasiado este Capítulo si diéramos el desarrollo de las varias fórmulas barométricas que multitud de autores han establecido fundándose en hipótesis más ó menos arbitrarias. Entre las varias dadas, la más antigua, la de Halley, no tiene en cuenta la variación de la energía de la pesantez con la latitud y la altura; ni la de densidad del aire por los cambios de temperatura y humedad, y su uso debe limitarse al caso de pequeños desniveles, con una atmósfera tranquila y siempre que se requiera poca exactitud en el resultado.

Hé aquí la fórmula:

$$Z = 18328^{m}.4 \log. \frac{H_o}{H_z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En la cual Z es el desnivel entre los dos puntos en que se observaron las alturas barométricas H_o y H_z.

Esta fórmula puede fácilmente reducirse á tabla y aun mejorarse introduciendo diversos valores del coeficiente numérico deducidos de determinaciones experimentales.

Laplace en su Mecánica Celeste, da una fórmula más general que la anterior, pues lleva en cuenta varios factores que omite la de Halley. En esta fórmula se encuentra un coeficiente constante que Ramond de Carbonieres determinó experimentalmente en los Pirineos y tiene por valor:

$$\frac{0.76}{M\,\pi_o} = 18336$$

y en el que M representa el módulo de los logaritmos neperianos para pasar á los vulgares, π_o el peso del metro cúbico de aire á la temperatura de 0° y $0^{m}.76$ la presión normal al nivel del mar. El físico citado determinó el coeficiente por el conocimiento exacto de desniveles y resolviendo la ecuación de Laplace. Biot y Arago determinaron el mismo coeficiente por la medida directa de π_o.

Si en la fórmula de Laplace *no computamos directamente* la influencia de las variaciones de la *gravedad* por *latitud* y *altura*, sino que variamos el coeficiente numérico de la fórmula más general 18336 por 18393 que el citado Ramond ha usado con buen éxito para latitudes cercanas á 45°, la fórmula de Laplace se expresa así:

$$Z = 18393^{m}\left(1 + \frac{2(t_z + t_o)}{1000}\right) \log\left(\frac{H_o}{H_z + H_z\frac{(T_o - T_z)}{5412}}\right) \quad (2)$$

En la cual Z es el desnivel entre las estaciones donde se observan las presiones H_o y H_z; y son las temperaturas del aire y del mercurio respectivamente: t_o, t_z, T_o, T_z.

Si éstos cuatro últimos factores no se llevan en cuenta se obtiene la fórmula de Halley con alguna diferencia en el valor del coeficiente.

Las temperaturas deben expresarse en grados centígrados y las alturas barométricas en milímetros, corregidas previamente por el error debido á la capilaridad del tubo y á la dilatación de la escala barométrica, del modo que más tarde veremos.

La fórmula modificada de Laplace da resultados muy suficientes en los casos prácticos y puede aceptarse confiadamente; pues el efecto del cambio de acción de la gravedad es tan pequeño, que puede confundirse con el de los inevitables errores de observación.

164. Diaz Covarrubias ha dado otra fórmula tomando en cuenta la corrección por cambio de gravedad con la latitud. Esa fórmula es la siguiente: (1)

$$Z = A\,D\,(\log H' - \log H'')\left(1 + \frac{2r + Z}{R}\right) \ldots\ldots\ldots (3)$$

en la cual

$$A = 18370\,(1 + 0.0033 \cos 2\varphi),$$
$$D = 1 + 0.002(t_o + t_z),$$

(1). Véase la obra citada de Diaz Covarrubias, tomo 1º, pág. 516.

H′ y H″ son las alturas barométricas reducidas á 0°, y Z, t_o y t_z tienen el mismo significado que en la fórmula (2); φ es el término medio de las latitudes de las dos estaciones; R el radio de la tierra y r la altitud de la estación inferior.

Los logaritmos de A y D los dan las tablas siguientes:

Factor barométrico dependiente de la latitud.

φ	Log A	φ	Log A	φ	Log A
0°	4.26554	16°	4.26532	32°	.26473
1	. 554	17	. 529	33	. 469
2	. 554	18	. 526	34	. 465
3	. 553	19	. 523	35	. 460
4	. 553	20	. 520	36	. 455
5	. 552	21	. 517	37	. 450
6	. 551	22	. 514	38	. 446
7	. 550	23	. 511	39	. 441
8	. 549	24	. 507	40	. 436
9	. 547	25	. 503	41	. 431
10	. 545	26	. 499	42	. 426
11	. 444	27	. 495	43	. 421
12	. 542	28	. 491	44	. 416
13	. 540	29	. 487	45	. 411
14	. 537	30	. 483	46	. 406
15	4.26535	31	2.26478	47	4.26401

Factor barométrico dependiente de la temperatura del aire.

$t_o + t_x$	Log D	Dif	$t_o + t_x$	Log D	Dif.	$t_o + t_x$	Log D	Dif.
2	0.00173	87	24	0.02036	83	46	0.03822	80
3	. 0260	86	25	. 2119	83	47	. 3902	79
4	. 0346	86	26	. 2202	82	48	. 3981	79
5	. 0432	86	27	. 2284	82	49	. 4060	79
6	. 0518	86	28	. 2366	83	50	. 4139	79
7	. 0604	85	29	. 2449	82	51	. 4218	79
8	. 0689	86	30	. 2531	81	52	. 4297	78
9	. 0775	85	31	. 2612	82	53	. 4375	79
10	. 0860	85	32	. 2694	82	54	. 4454	78
11	. 0945	85	33	. 2776	81	55	. 4532	78
12	. 1030	85	34	. 2857	81	56	. 4610	78
13	. 1115	84	35	. 2938	81	57	. 4688	78
14	. 1199	85	36	. 3019	81	58	. 4766	78
15	. 1284	84	37	. 3100	81	59	. 4844	78
16	. 1368	84	38	. 3181	81	60	. 4922	77
17	. 1452	84	39	. 3262	80	61	. 4999	78
18	. 1536	84	40	. 3342	81	62	. 5077	77
19	. 1620	83	41	. 3423	80	63	. 5154	77
20	. 1703	84	42	. 3503	80	64	. 5231	77
21	. 1787	83	43	. 3583	80	65	. 5308	77
22	. 1870	83	44	. 3663	80	66	0.05385	
23	. 1953	83	45	. 3743	79			
24	0.02036		46	0.03822				

Aunque el segundo miembro de la fórmula (3) contiene todavía la incógnita Z, se calcula con facilidad de la manera siguiente: representando por Z′ el valor aproximativo que se obtiene suponiendo nula la cantidad $2r + Z$, que es realmente muy pequeña respecto de R, resulta:

$$Z = Z'\left(1 + \frac{2r + Z'}{R}\right)$$

y tomando los logaritmos de esta ecuación:

$$\log Z = \log Z' + \frac{2Mr}{R} + \frac{MZ'}{R}$$

lo cual indica que para hallar el logaritmo del verdadero desnivel basta hacer al aproximativo las pequeñas correcciones por r y Z'. Si se trata de calcular una altura absoluta, $r = o$; pero aunque no sea así la corrección por r es siempre insignificante, pues para $r = 1000^m$ apenas llega á 0.00014 el valor de $\frac{2 M r}{R}$. En consecuencia, no hay inconveniente en suponer generalmente $r = 0$, lo cual convierte la anterior corrección en la siguiente:

$$\log Z = \log Z' + \frac{M Z'}{R}$$

que está contenida en la tabla siguiente que da la corrección de log Z con el argumento log Z'.

Corrección del logaritmo del desnivel aproximativo.

Log Z'	Corrección.	Log Z'	Corrección.	Log Z'	Corrección.
2.50	0.00002	3.15	0.00010	3.50	0.00022
2.60	. 3	3.20	. 11	3.55	. 24
2.70	. 3	3.25	. 12	3.60	. 27
2.80	. 4	3.30	. 14	3.65	. 30
2.90	. 5	3.35	. 15	3.70	. 34
3.00	. 7	3.40	. 17	3.75	. 38
3.10	. 9	3.45	. 19	3.80	. 43
3.15	0.00010	3.50	0.00022	3.85	0.00048

Sin embargo, si se desea atender á la altura de la estación inferior, la tabla que sigue suministra la corrección de log Z tomando por argumento el valor de r.

Corrección de log Z.

r	Corrección.	r	Corrección.
500^m	0.00007	2500^m	0.00034
1000	. 14	3000	. 41
1500	. 20	3500	. 48
2000	0.00027	4000	0.00054

165. Para obtener la altura absoluta de un punto con la mayor precisión posible por medio del barómetro, sería preciso hacer una verdadera nivelación por estaciones sucesivas y con observaciones simultáneas á horas escogidas de modo que en ellas la presión sea sensiblemente la media de las varias del día y haciendo una de las estaciones al nivel del mar; pero en muchos casos será bastante adoptar para esta estación una presión media de 0.76 á la temperatura media de 25°.

Como ejemplo tomemos el que da el Sr. Diaz Covarrubias. El barón de Humboldt, cerca de la cima del Chimborazo observó el barómetro y halló que su altura era de $0^m.3773$, y su temperatura de 10° y la del aire de —1°.6. Al mismo tiempo indicaba el barómetro al nivel del mar $0^m.7620$ siendo la temperatura del mercurio igual á la del aire y de 25°.3.

Para la *reducción de las alturas barométricas á 0°* usaremos la siguiente tabla, en la cual el valor de F, correspondiente á la altura barométrica observada, se multiplica por la temperatura del mercurio y se resta el producto de la dicha altura observada para obtener la reducida á 0°, tanto por dilatación del mercurio cuanto de la escala de latón:

$$(H' = H_{obs.} - F\,T).$$

Tabla del coeficiente *F* para reducir á 0° las alturas barométricas.

Argumento: LA ALTURA BAROMÉTRICA.

Altura.	*F*	Altura.	*F*	Altura.	*F*
0m.36	0.000058	0m.50	0.000081	0m.64	0.000104
0 .37	. 60	0 .51	. 83	0 .65	. 105
0 .38	. 62	0 .52	. 84	0 .66	. 107
0 .39	. 63	0 .53	. 86	0 .67	. 109
0 .40	. 65	0 .54	. 87	0 .68	. 110
0 .41	. 66	0 .55	. 89	0 .69	. 112
0 .42	. 68	0 .56	. 91	0 .70	. 113
0 .43	. 70	0 .57	. 92	0 .71	. 115
0 .44	. 71	0 .58	. 94	0 .72	. 117
0 .45	. 73	0 .59	. 96	0 .73	. 118
0 .46	. 75	0 .60	. 97	0 .74	. 120
0 .47	. 76	0 .61	. 99	0 .75	. 122
0 .48	. 78	0 .62	. 100	0 .76	. 123
0 .49	0.000079	0 .63	0.000102	0 .77	0.000125

Tendremos:

ESTACIÓN INFERIOR.

$0.000123 \times 25°.3 = 0^m.0031$
Altura observada $= 0\ .7620$

(H′) Altura reducida á $0° = 0^m.7589$

ESTACIÓN SUPERIOR.

$0.000061 \times 10° = 0^m.0006$
Altura observada $= 0\ .3773$

(H″) Altura reducida $= 0^m.03767$

$T_o = t_o = 25°.3 \qquad T_z = 10° \qquad t_z = -1°.6$

La latitud media de las dos estaciones era $\varphi = 1°45'$.

Con este argumento, la tabla relativa da: $\log A = 4.26554$, y con $t_o + t_z$ la tabla siguiente da: $\log D = 0.02011$. El cálculo será:

$\log H' = 9.88018 \qquad \log A = 4.26554$
$\log H'' = 9.57600 \qquad \log D = 0.02011$

$\log H' - \log H'' = 0.30418$..... 9.48313

$\log Z'$..... 3.76878
Corrección por r (tabla). 0.00040

$\log Z$..... 3.76918 $\quad Z = 5877^m3$

La Agenda de Trautwine da una fórmula sencilla y que puede ser bastante en muchos casos para la determinación de la diferencia de altura entre dos estaciones. Es la siguiente:

$$Z = 30 \frac{(H_o - H_z)\,\theta}{\frac{H_o + H_z}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

en la cual 30 es un coeficiente numérico; Z la diferencia de alturas expresada en pies ingleses; H_o y H_z las alturas barométricas en las dos estaciones expresadas en pulgadas inglesas y θ un factor dado por la tabla siguiente que he reducido de la de la obra citada. La tabla da el valor de θ según el término medio T de las temperaturas observadas en las dos estaciones. Los grados son Farenheit y las temperaturas deben tomarse á la sombra:

T	*θ*	*T*	*θ*	*T*	*θ*	*T*	*θ*
25	853.9	47	900.2	69	946.7	91	993.1
26	856.0	48	902.3	70	948.8	92	995.2
27	858.1	49	904.5	71	950.9	93	997.3
28	860.2	50	906.6	72	953.0	94	999.4
29	862.3	51	908.7	73	955.1	95	1001.6
30	864.4	52	910.8	74	957.2	96	1003.7
31	866.5	53	913.0	75	959.3	97	1005.8
32	868.6	54	915.1	76	961.4	98	1007.9
33	870.7	55	917.2	77	963.5	99	1010.0
34	872.8	56	919.3	78	965.6	100	1012.1
35	874.9	57	921.4	79	967.7	101	1014.2
36	877.0	58	923.5	80	969.9	102	1016.3
37	879.2	59	925.6	81	972.0	103	1018.4
38	881.3	60	927.7	82	974.1	104	1020.5
39	883.4	61	929.8	83	976.2	105	1022.7
40	885.4	62	931.9	84	978.3	106	1024.8
41	887.5	63	934.0	85	980.4	107	1026.9
42	889.6	64	936.1	86	982.6	108	1029.0
43	891.7	65	938.2	87	984.7	109	1031.1
44	893.8	66	940.3	88	986.8	110	1033.2
45	896.0	67	942.4	89	988.9	111	1035.3
46	898.1	68	944.5	90	991.0	112	1037.4

Belville ha dado una regla muy útil para un rápido uso en el campo y que da una buena aproximación para desniveles poco fuertes. La regla se enuncia así: *la suma de las lecturas barométricas* (en pulgadas inglesas) *es á la diferencia entre las mismas, como 55,000 pies es con la diferencia de alturas.* O sea:

$$\frac{H_o + H_z}{H_z - H_o} = \frac{55.000^{\text{pies}}}{Z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Encontrada la diferencia de altura por una ú otra de las fórmulas (4) ó (5), si se desea corregir el resultado por la latitud, se divide el desnivel encontrado por el número de la tabla siguiente, que corresponde á la media de las dos latitudes de las estaciones y el cociente obtenido se añade á la diferencia de alturas que primero se había determinado.

Latitud.	Número.	Latitud.	Número.	Latitud.	Número.	Latitud.	Número.
6°	360.	15°	407.5	24°	527.0	33°	873
7	363.5	16	416.0	25	549.5	34	941.0
8	367.0	17	426.0	26	572.0	35	1041.0
9	371.0	18	436.0	27	601.0	36	1140.0
10	375.0	19	448.0	28	630.0	37	1300.0
11	380.5	20	460.0	29	667.5	38	1458.0
12	386.0	21	475.0	30	705.0	39	1743.0
13	392.5	22	490.0	31	754.5	40	2028.0
14	399.0	23	508.5	32	804.0	41	2700.0

166. Otra modificación á la fórmula de Laplace ha sido hecha por Radan, y éste ha calculado una tabla de muy fácil manejo para computar alturas por medio del barómetro y otra pequeña para corregir por el cambio del efecto de la gravedad con la latitud. La tabla número 3 que va al fin de este volumen está calculada con la fórmula:

$$Z = 18382 \log \frac{H_o}{H_z} + \frac{1}{R}\left(18382 \log \frac{H_o}{H_z}\right)^2 \ldots\ldots (6)$$

en la que H_o es la altura barométrica al nivel del mar que se tomó igual á 760 milímetros; H_z la altura barométrica en la estación de observación y $R = 6.366.200$. Para la determinación del coeficiente se ha considerado el aire á 0° y la latitud de 45°. La altura H_z debe estar reducida á 0°.

Con el argumento H_z la tabla da la altura absoluta de la estación admitiendo como exactos los supuestos anteriores.

Si se trata de diferencia de nivel entre dos estaciones sin que ninguna de ellas esté al del mar, la tabla da las alturas absolutas de cada una y la diferencia de éstas el desnivel buscado, el cual es independiente de la hipótesis de $0^m.760$ como presión al nivel del mar. Las alturas barométrica deben reducirse á 0°.

Si conocemos el valor de H_o en la época de observación y con este dato en lugar del de $0^m.760$ entramos á la tabla, el resultado será más exacto.

Para obtener un valor más cercano á la verdad que el proporcionado por el método anterior, puede corregirse el Z, tomando en cuenta la latitud φ y la temperatura del aire en las estaciones: t_o y t_z. La corrección se hace por medio de esta fórmula.

$$Z_o = Z + 2(t_o + t_z + A)\frac{Z}{1000} \quad \text{.....(7)}$$

en la que Z_o es el desnivel corregido; Z el aproximado dado por la citada tabla número 3 y A el número dado por la tabla número 4 al fin de este volumen, cuyo argumento es la latitud media φ de los lugares de observación.

Si las alturas no se han reducido á 0° se puede obtener Z como si lo hubieran sido y al resultado se le resta

$$1.3\,(T_o - T_z)$$

siendo T_o y T_z las temperaturas marcadas por los termómetros fijos.

Si se emplea un barómetro aneroide (de los que hablare-

mos adelante) al valor Z se disminuye $\frac{1}{400}$ porque no teniendo que considerar en estos barómetros la pérdida de peso del mercurio al aumentar la altitud, debe el coeficiente 18382 ser solamente de 18336.

Apliquemos al cálculo de la misma altura del Chimborazo la fórmula de la tabla de Radan que va al fin de este volumen y tomé de un opúsculo de mi buen amigo el Sr. Ingeniero Adolfo Diaz Rugama (1).

En la tabla encontramos para:

	$0^m.3760$.....	$5622^m.90$	Diferencia por $1^{mm} = 21.2$
Corrección por	.0007.....	14.84	
Por	.3767.....	5608.06	
Para $0^m.758$	.....	21.00	Diferencia por $1^{mm} = 10.5$.
Corrección por	.0009.....	9.45	
Por $0^m.7589$	.....	11.55	

Diferencia $5608^m.06 - 11^m.55 = 5596.51$, altura aproximada.

La corrección por latitud se obtiene de la tabla que va al fin (número 4) y tendremos por la fórmula (7) $25°.3 - 1°.6$ (suma de temperaturas) más el número correspondiente de la tabla á la latitud: 1.3, multiplicado por 2 y por el milésimo de la altura aproximada:

$$(25°.3 - 1°.6 + 1.3)\,2 \times 5.5965 = 279^m.82$$

cifra que añadida á la altura aproximada da para la exacta:

$$Z = 5596.51 + 279.82 = 5876^m.33$$

167. De tres clases son los instrumentos que miden la presión atmosférica: barómetros de mercurio; aneroides ú olostéricos y termo-barómetros ó hipsómetros.

(1) "Consideraciones sobre la importancia de la configuración." 1889.

Los primeros dan directamente la altura de la columna de mercurio que hace equilibrio á la presión del aire; los segundos por la deformación que sufre una caja metálica cerrada, bajo la influencia de la referida presión, acusan su valor y los últimos la miden indirectamente por la temperatura de ebullición del agua.

168. *Barómetro de mercurio.*—El barómetro de mercurio se construye de dos formas: de cubeta y de sifón. De la primera clase describiremos el Fortin y de la segunda el de Gay Lussac.

El barómetro transportable de Fortin consiste en una cubeta que representa en corte vertical la figura 96, y la cual está formada por una tapa C C forrada de cobre al exterior y que lleva un tubo central B B que deja pasar el tubo del barómetro á un cilindro de vidrio D D masticado en sus extremos y sujeto por tres varillas de cobre de tornillo (una de las cuales se ve en CH) y á un cilindro de metal E F G H que lleva un tornillo Q en el fondo. En el interior de este cilindro se encuentra un anillo de madera dura M M N N, compuesto de dos, atornillados uno sobre otro; el primero fijo al cilindro exterior y el otro que puede desmontarse y se prolonga por un saco de gamuza atado fuertemente sobre su contorno y el cual forma el fondo de la cubeta y sostiene el mercurio del barómetro.

Subiendo ó bajando el tornillo Q se hace subir ó bajar el fondo móvil, y por consecuencia, el mercurio que encierra, y por este medio se lleva el nivel del líquido á una altura invariable. A este efecto, la tapa C C tiene un agujero lateral por el que pasa una punta de marfil B invariablemente fijada á aquélla y cuya extremidad marca el nivel constante, al que se lleva el mercurio en el momento de cada observación girando el tornillo Q.

El tubo barométrico penetra á la cubeta por la abertura central B B y se fija á ella por medio de otra piel que se ata al anillo B B y al tubo, permitiendo que pase el aire por los

poros de la piel é impidiendo salga el mercurio, si llega hasta ella cuando se sube el tornillo Q.

El tubo está cubierto por una envoltura cilíndrica de cobre que se atornilla á B B y sobre la cual está trazada en milímetros una división cuyo cero corresponde á la punta de marfil, es decir, al nivel constante del mercurio en cada observación. En la parte alta en el sentido de las generatrices, la envoltura tiene dos hendeduras opuestas á través de las cuales se ve el punto más alto de la columna de mercurio y sobre las que desliza una pieza anular que se hace subir ó bajar por medio de un piñón engranado con una regla dentada (fig. 97).

Para hacer una medida se baja la corredera manteniendo el ojo del observador en el plano horizontal que pasa por sus bordes anterior y posterior, hasta el momento en que ese plano sea tangente á la superficie superior del mercurio y en este punto se hace la lectura de la escala por el vernier de la corredera que aprecia décimos de milímetro. El nivel en la cubeta debe estar en el cero de la escala ó sea en la punta de la aguja de marfil que se enrasa con una gran precisión con el líquido.

El barómetro Fortin presenta varias ventajas. Una de ellas consiste en que llevándose el nivel exterior á una altura constante no hay que hacer sino una lectura.

Otra no menor es la de presentar mucha seguridad en los transportes. Para efectuarlos se levanta poco á poco el tornillo Q, el mercurio sube hasta llenar completamente la cubeta expulsando el aire que contiene y se eleva después hasta alcanzar la parte alta del tubo, en cuyo momento el operador siente una resistencia súbita. En esta situación el mercurio no sufre movimientos en los transportes, en los que podría romperse el tubo, y se impide la entrada del aire á la cámara barométrica, siendo posible inclinar y aun invertir el instrumento sin temer alguna alteración ó ruptura.

Se encierra de ordinario el barómetro en un estuche divi-

sible en tres partes articuladas que forman un tripié, del cual se suspende el barómetro para que se disponga vertical (fig. 97 bis).

169. El barómetro de sifón de Gay Lussac tiene la forma que se ve en la figura 98, y consta de dos partes: A B que forma la columna del barómetro y C D que formá la cubeta y están reunidas por un tubo capilar E F, y dispuestas de tal modo que A B y C D están una en prolongación de otrà.

La presión se ejerce por un agujero perforado en la extremidad de una punta reentrante C que se obtiene empujando de fuera á dentro el vidrio del tubo reblandecido por medio del calor.

Los dos niveles siendo A y D, es evidente que la presión se mide por la diferencia de alturas entre esos puntos, la que se lee sobre una escala semejante á la descrita y trazada sobre un tubo de latón no representado en el dibujo, que sirve de cubierta y defensa al barómetro. Este instrumento tiene dos correderas con vernieres, pues en él hay que hacer dos lecturas, debido á no ser constante el nivel de la cubeta.

Bunten ha modificado el tubo capilar añadiéndole un espacio dilatado C B (fig. 99), en el cual se prolonga el tubo superior y cuyo objeto es impedir la entrada del aire á la cámara barométrica cuando se inclina el instrumento para transportarlo.

170. *Depresión capilar.*—Además de las correcciones por temperatura, indispensables para el cálculo de la presión atmosférica, indicamos la necesidad de corregir por la capilaridad que altera la altura de la columna barométrica. Este factor no se lleva en cuenta en los aneroides y termo-barómetros, y nos ocuparemos de él desde luego.

Se llama *depresión capilar* la diferencia de nivel que se observaría en el tubo y en la cubeta si, estando aquél abierto, la presión atmosférica pudiera ejercerse libremente en el interior y en el exterior del tubo. La depresión capilar que llamaremos C depende, para un mismo líquido, del ángulo de

unión del líquido y del vidrio, así como del diámetro del tubo. Este ángulo no es constante para el mercurio de los barómetros, y experiencias de Bravais sobre barómetros de una misma fábrica demuestran que varía de 30° á 40°, de donde resulta que la flecha del menisco puede cambiar notablemente y la depresión capilar ser muy desigual para barómetros de la misma sección, y por lo mismo, será preciso, para tener los elementos del cálculo de corrección, medir el diámetro del tubo y el ángulo de enlace ó la flecha del menisco que permite calcular este ángulo.

Delcros ha calculado tablas de esta corrección (1). Como ejemplo citaremos los resultados de Bravais para un ángulo de 36°:

Diámetro del tubo.	Depresión *C*.
4^{mm}	$1^{mm}.635$
6	0 .909
8	0 .538
10	0 .522
12	0 .195
14	0 .117
16	0 .070
18	0 .041
20	0 .025

El valor de C conveniente al barómetro usado debe añadirse á la altura de la columna (2).

En el barómetro de sifón se ha buscado el eliminar el error de capilaridad por la compensación entre los dos producidos en tubos de igual diámetro, pero no puede esperarse rigurosamente este resultado á causa de que el mercurio de la cu-

(1). Memoires de l'Académie de Bruxelles. Tomo XIV.

(2). Según Laplace para diámetro interior del tubo de 7^{mm}, 8^{mm}, 9^{mm}, 10^{mm}, 12^{mm}, 14^{mm}, la depresión es de $0^{mm}.881$, $0^{mm}.685$, $0^{mm}.535$, $0^{mm}.420$, $0^{mm}.260$. $0^{mm}.160$.

Díaz Covarrubias da los valores siguientes:

Para	4^{mm}	6^{mm}	8^{mm}	10^{mm}	12^{mm}	14^{mm}	16^{mm}	18^{mm},
Depresión:	$2.^{mm}07$	$1^{mm}.17$	$0^{mm}.71$	$0^{mm}.44$	$0^{mm}.26$	$0^{mm}.16$	$0^{mm}.10$	$0^{mm}.06$

beta se altera al contacto del aire y entonces los dos meniscos dejan de ser iguales y el error no puede ya apreciarse.

171. *Dilatación de la escala.*—La lectura hecha sobre la escala de latón deberá además corregirse por la variable longitud de ésta según su temperatura. Si la última es t y..... 0.0000186 el coeficiente de dilatación del metal; la altura corregida por dilatación de la escala y capilaridad, será:

$$h_0 = h_t(1 + 0.0000186\,t) + c$$

Esta altura barométrica corregida por la dilatación de la escala y capilaridad es la que se hace entrar en las fórmulas (2) y (3).

172. Antes de usar un barómetro es indispensable compararlo con un barómetro patrón, pues á pesar del cuidado del constructor es posible que la punta de marfil (en el Fortin) no coincida con el cero de la escala, lo cual se acusará en la comparación, por un error constante en las lecturas, que será necesario llevar en cuenta en las observaciones subsecuentes. Puede el vacío barométrico ser imperfecto ó la escala estar mal dividida y estas últimas causas producir también errores en las lecturas no de valor constante como el de índice sino irregular.

Barómetro Aneroide.

173. *Descripción.*—El barómetro aneroide ó metálico fué ideado por Vedi en 1848 y por sus pequeñas dimensiones y funcionamiento regular en cualquiera posición, se ha hecho de universal empleo para los viajeros y prestado grandes servicios en exploraciones geográficas hechas rápidamente.

Este instrumento, como ya indicamos, mide la presión atmosférica por la deformación de una caja elástica cerrada, vacía de aire. Esta caja es de forma cilíndrica, y una de sus bases, de metal delgado, está ondulada para flexionarse á la más ligera presión. La otra base está fijada á las paredes de

una caja mayor que encierra el mecanismo del aneroide. La base ondulada, mediante un sistema cinemático, transmite los movimientos que en ella se producen por los cambios de presión atmosférica, á una aguja que recorre una graduación circular.

Se han hecho modificaciones más ó menos felices al aneroide de Vedi; pero substancialmente el instrumento es el mismo. Citaremos la hecha por Bourdon, que sustituyó al cilindro un tubo encorvado de sección elíptica alargada, que se cierra ó abre como los de los manómetros metálicos del mismo autor.

Los fabricantes más reputados de aneroides son Naudet, de Paris, Negretti y Zambra de Londres, Qeen & Comp. de Philadelphia, etc.

Describiremos el que fabrica Naudet que llama su autor olostérico (1), y está representado por la figura 100.

Sobre un fondo circular muy sólido P Q está fijada la caja vacía T T′ por medio del apéndice C. Las bases de esta caja ó tambor son de metal muy delgado y ondulado, y por lo mismo muy flexibles, mientras la parte cilíndrica es de mayor espesor y por lo tanto insensible á los cambios de presión del aire. En el centro del fondo superior A está soldada una columnita S de metal, la cual atraviesa el labio de un fuerte resorte de acero F y apoya en él firmemente por medio de un atravesaño de sección cuadrada **m**, de acero templado.

El resorte F se mantiene en su posición por dos soportes iguales, de los que sólo uno S′ se ve en la figura.

Si aumenta la presión atmosférica la tapa A se dobla hacia el interior del tambor arrastrando consigo la columnita y flexionando el resorte hasta que su tensión haga equilibrio al exceso de la presión exterior sobre la interior.

Si por el contrario, disminuye la presión atmosférica, el

(1). *Olostérico*: compuesto de partes sólidas. Este nombre debiera emplearse mejor que el de aneroide que quiere decir: gas que no es aire. El nombre no puede ser más impropio.

resorte se levanta moviendo la tapa A hasta que de nuevo se establezca el equilibrio entre su propia tensión y el esfuerzo de la presión sobre el fondo móvil.

El resorte viene á desempeñar el papel del mercurio en los barómetros comunes.

Sólo falta construir un mecanismo resistente y sencillo capaz de transformar los pequeños movimientos alternativos y casi rectilíneos del resorte, en circulares de un índice sobre una graduación, aumentándolos para hacerlos visibles al observador.

Para ello, el resorte lleva un brazo **a b** fijado en **a** por un tornillo y articulado en **b** con otro brazo más corto **b c** que obra sobre un árbol del modo que veremos: A otra columnita **r** fijada en la base P Q está asegurada una pieza **p q** á manera de ménsula, la cual en su extremidad sostiene el perno V de rotación del índice; perno que en su medio presenta un pequeño tambor W y en su parte alta y fuera de la carátula del barómetro, lleva la aguja Z Z. En el tambor ó polea W está fijada por un extremo y enrrollada una cadena muy fina **d**, la cual se une por su otro extremo á la palanca **e f** montada sobre el árbol de que hablamos y transmite al índice los movimientos del resorte con el intermediario del sistema descrito.

Un resorte en espiral semejante al del volante de un reloj mantiene la tensión de la cadenita cuando ésta se afloja por consecuencia de los movimientos de la palanca **e f**, y hace girar el perno en sentido opuesto al de tracción.

La figura 101 da la proyección horizontal del árbol **o o** sobre el que está una palanca K **h** que se une á la **b c** por la pieza **h**. Se comprende bien la transmisión del movimiento: el resorte mueve la palanca **a b**; ésta la **b c** y **b c** la **h**, la cual obra sobre la **f** y ésta sobre la cadena enrrollada en el perno central.

Para rectificar el barómetro se gira el tornillo V′ desde el

exterior de la caja haciéndolo obrar sobre el sostén del resorte principal.

Diversas clases de aneroides ú olostéricos.—Graduación y compensación.—El exterior del barómetro no presenta nada interesante y varía en detalles cuyo objeto es fácil comprender examinando el que se tenga á la vista. Los hay provistos de un pequeño microscopio que gira para poder colocarlo sobre el punto de la graduación marcado por la aguja y leer con mayor aproximación. Otros tienen sobre el plano de la carátula un pequeño termómetro encorvado que da la temperatura propia del instrumento que puede ser diferente de la atmosférica; pero tratándose del aneroide esta corrección es inútil, pues en éste instrumento hay causas de error inevitables, superiores en valor al de diferencia de temperatura del instrumento y del aire.

Un módelo suizo de Hottinger & Comp. presenta ciertas particularidades: la graduación está cubierta por completo y solamente se puede visar una pequeña parte de ella para hacer la lectura valiéndose de un microscopio que lee, con ayuda de un vernier, hasta centésimos de pulgada inglesa. Lo acompaña un pequeño termómetro Farenheit.

174. En los barómetros metálicos, Salmoiraghi considera tres clases principales:

1ª Tamaño pequeño ó reloj altimétrico.

2ª Tamaño mediano con carátula de unos 60 milímetros de diámetro y medida de presiones desde 620 hasta 790 milímetros; la graduación es de 170 partes, representando cada una un milímetro de presión.

3ª Tamaño normal para ingenieros; la carátula tiene cerca de 110 milímetros y se hace de dos variedades:

a. Con presiones de 610 á 790 milímetros y escala de 360 partes. Por consecuencia, cada una marca medio milímetro de presión.

b. Con presiones de 390 á 780 milímetros y escala de 390 partes correspondiente cada una á un milímetro de presión.

Este modelo puede servir para alturas hasta de 5000 metros y el anterior para alturas hasta de 3000 metros (1).

Los barómetros de las dos primeras clases son instrumentos de poca precisión y deben usarse sin termómetro; los de la tercera son verdaderos instrumentos de medida y tan útiles para observaciones exactas, como los de mercurio.

Teniendo en cuenta la exactitud de las medidas que proporciona el aneroide de cada una de las clases señaladas, debiera la escala trazarse de distinta manera en los de las dos primeras y en los de la última.

En aquéllos convendría trazar la escala mediante prueba directa de los instrumentos á presiones diferentes y en los aneroides de tamaño normal debería trazarse una división de partes iguales.

Los movimientos angulares del índice no puede aceptarse sean proporcionales á las diferencias de presiones, aun cuando el mecanismo está ideado y construído de modo que dicha condición se satisfaga lo mejor posible; pero en general, no puede admitirse que la ley de la proporcionalidad esté completamente satisfecha; de donde, si la escala del aneroide es de partes iguales, casi puede asegurarse que no se obtendrán indicaciones exactas.

A alterar más aún la ley de la proporcionalidad viene el efecto de los cambios de temperatura sobre el mecanismo cinemático del barómetro. El calor, obrando en el sentido de alargar ó acortar las palancas, la cadenita, etc., se hace un elemento perturbador del funcionamiento de estas partes.

Veremos adelante cómo se remedia en lo posible este defecto; pero, entretanto, es evidente que un barómetro de escala de iguales partes, usado por lecturas directas de la graduación, solamente proporciona indicaciones aproximadas.

Sería, por lo tanto, conveniente que los constructores eli-

(1). En México deben usarse barómetros que indiquen alturas hasta 5000 metros, pues hay varias cerca de ese límite en nuestro país y aun algunas que lo exceden.

gieran una temperatura media (la más común según las condiciones en que debe verse el instrumento) y á ella determinaran directamente, con aparatos apropiados, las posiciones del índice á presión variable; por ejemplo, de centímetro en centímetro de mercurio para subdividir los intervalos en diez partes iguales.

Este modo de graduar equivale á suponer que la ley de proporcionalidad (inadmisible en todo el curso del índice) se verifica en los pequeños intervalos de un centímetro, lo cual es muy aceptable en la práctica.

Si por otra parte se procura compensar el efecto de las variaciones de temperatura, el barómetro podrá ser útil no sólo á la temperatura elegida en la comparación, sino á todas aquellas para las cuales la compensación tenga realmente lugar.

Muchos aneroides que presentan los constructores como compensados, ó como dando las lecturas reducidas á 0° sea cual fuere la temperatura del instrumento, comparados con barómetros patrones demuestran claramente que no se alcanza esa compensación, y al contrario, aneroides no compensados dan resultados semejantes á los de los llamados compensados. De aquí debe deducirse que tratándose de instrumentos de las dos primeras clases, es preciso conformarse con indicaciones aproximadas; pero para el fin á que de ordinario se destinan, que es el de dar desniveles con exactitud bastante para configurar los movimientos del terreno, completando la idea que de éste se da en el plano, sin pretender salir de la parte puramente descriptiva para alcanzar el conocimiento exacto de los desniveles, son suficientemente buenos aun los no compensados, y mucho menos costosos que los compensados.

En cuanto á los barómetros de la tercera clase ó *normales*, deben tener su graduación en partes iguales que se aproximen á la correspondiente á variaciones de un milímetro de presión. En este caso la graduación sólo sirve para fijar el

lugar del índice, y la presión se deduce en función de esta indicación, como vamos á explicar.

Desde luego debe admitirse que la graduación del aneroide está hecha por el constructor de tal manera que se acerca bastante la indicación de la aguja al valor de la presión atmosférica, lo cual se consigue comparando dos puntos de la escala con un barómetro patrón y dividiendo después el intervalo entre los dos puntos en un número de partes, igual al de la diferencia en milímetros entre las dos presiones.

175. *Comparación de los aneroides.*—Ejecutada esta primera aproximación por el constructor, busquemos como segunda aproximación la corrección debida á la falta de proporcionalidad entre las amplitudes de los movimientos del índice y las variaciones de la presión y al hecho de las inevitables perturbaciones debidas á los cambios de la temperatura.

Para hacerlo, comparemos el aneroide con un barómetro patrón de mercurio y llamemos L la lectura hecha en el olostérico y B_o la presión dada por el barómetro de mercurio, ya reducida á 0° y corregida por todos los errores propios de este instrumento: capilaridad, dilatación de la escala, etc.

Es claro que si B_t es la presión dada por el barómetro de mercurio á la temperatura t (en grados centesimales) y a es el coeficiente de dilatación del mercurio:

$$B_o = \frac{B_t}{1 + at}$$

Para el barómetro olostérico podemos admitir que la presión B_o está dada por la fórmula:

$$B_o = L + \varphi(t) + \psi(L)$$

expresando $\varphi(t)$ la corrección necesaria para tener en cuenta los efectos de las variaciones de temperatura que indicamos genéricamente por t y con $\psi(L)$ la corrección á la presión correspondiente al lugar de la graduación que señala el índice.

El problema consiste en determinar experimentalmente las funciones φ y ψ, y para conseguirlo, lo haremos independiendo una de otra. Empecemos por φ.

Admitamos que esta función sea racional y entera (la experiencia ha probado que, tratándose de correcciones pequeñas, se verifica esta hipótesis) y que en el desarrollo de la función puedan despreciarse los términos de segundo orden, y tendremos:

$$\varphi(t) = a + b\,t$$

siendo a y b dos coeficientes por determinar.

Para determinar aisladamente la función φ es preciso observar á presión constante y temperatura variable, y de este modo la corrección ψ (L) se comprende en el término a de la función φ; esto es, en la diferencia entre la presión leída en el aneroide supuesto á 0° y B_o.

$$B_o - L = a + b\,t$$

En esta ecuación B_o, L y t son conocidas por la observación; de consiguiente, si artificialmente se hace variar t y se repiten las observaciones, se podrá formar una serie de ecuaciones semejantes á la anterior. Llamando $B_o - L = \varepsilon$, se tendrá:

$$\begin{aligned} a + b\,t &= \varepsilon \\ a + b\,t' &= \varepsilon' \\ a + b\,t'' &= \varepsilon'' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a + b\,t_n &= \varepsilon_n \end{aligned}$$

Si las observaciones hechas fueran exactas, dos de estas ecuaciones bastarían para conocer a y b; pero como en la experimentación se cometen pequeños errores inevitables, debe hacerse mayor número de observaciones y resolver las ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados (1).

(1). Véase apéndice del tomo 2º ó Liagre, Calcul des probabilités, págs. 360 y siguientes.

Si se han formado n ecuaciones:

$$a = \frac{\Sigma \varepsilon \, \Sigma t^2 - \Sigma t \, \Sigma \varepsilon t}{n \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}.$$

$$b = \frac{n \Sigma t \varepsilon - \Sigma \varepsilon \, \Sigma t}{n \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

Experiencias sobre diversos barómetros han hecho concluir que el valor de a depende exclusivamente de la posición inicial del índice del barómetro y que el valor de b es siempre negativo; esto es, que el índice del barómetro olostérico avanza cuando la temperatura disminuye, lo cual se comprende fácilmente fijándose en la construcción del aneroide. Además, b puede considerarse como constante para un intervalo hasta de 50° y enteramente independiente de la presión.

El valor de b no se leería como constante si el barómetro no tuviese su escala de partes iguales, puesto que b es el coeficiente de proporcionalidad de los incrementos de los espacios angulares recorridos por el índice. Si la unidad de medida de estos incrementos se hace variable (lo que sucedería en el caso de una escala de partes desiguales en sus diversas regiones), también el valor de la corrección cambiaría, y es por lo tanto preferible que el aneroide tenga una escala de partes iguales.

Determinados a y b es posible independerse, ó mejor dicho, llevar en cuenta los cambios de temperatura por la fórmula:

$$B_o = L + a + b t$$

en la cual t se medirá directamente en cada caso, por la observación del termómetro que acompaña al instrumento ó por la de uno independiente y también comparados con un patrón que dará la temperatura del aire y la del aneroide que pronto toma la ambiente.

176. Para determinar el error debido á las variaciones de la presión que representamos por la función ψ (L), es preciso

experimentar variando la presión (que antes dejamos constante) y comparando el aneroide con el patrón, para lo que se transportarán los instrumentos á varias alturas á fin de obtener diferencias, por ejemplo, de centímetro en centímetro de la columna de mercurio.

Considerando la presión á la cual se han hecho las experiencias para determinar *a* y *b*, como punto de partida de las medidas subsecuentes, y llamando L'_o la diversa lectura en el aneroide ya corregida por temperatura, B_o la presión que llamaremos inicial la cual corresponderá exactamente á la lectura L_o; después de transportar los instrumentos á una altura dada á la que corresponda B'_o como presión acusada por el barómetro patrón ya reducida á 0°, la relación que une estos elementos y la corrección buscada será:

$$B'_o = L'_o + K(B_o - L'_o)$$

la que dará el valor de K.

La observación de cada aneroide hará conocer hasta dónde es admisible la constancia de K, y por consecuencia la corrección en cada tramo de la graduación.

Experiencias de Salmoiraghi, á quien hemos seguido casi textualmente en los anteriores párrafos sobre comparación de barómetros, demuestran que de 760^{mm} á 640^{mm}, *k* es constante; que se empiezan á encontrar anomalías en el segundo decímetro, pero de tan poca importancia, que para unos 20 centímetros de diminución de presión puede aceptarse el valor de K determinado con una experiencia variando 10 centímetros la presión.

Estos resultados pueden haber sido accidentales, y siempre es preferible hacer experiencias con intervalos de un centímetro de presión, que corresponde á unos 100 metros de desnivel.

Para cada instrumento puede construirse una tabla, calculando las correcciones con los coeficientes **a**, **b** y **k**, á fin de

conocer las alturas barométricas, tales como las habría dado un barómetro de mercurio, después de reducidas á 0°.

Observemos que el error de índice: **a**, puede hacerse desaparecer, ó por lo menos disminuirse, moviendo el tornillo V'.

Estas cuidadosas comparaciones del aneroide deben considerarse como indipensables, pues sin ellas no es posible dar fe á las indicaciones del instrumento. Si sólo debe éste servir para indicaciones aproximadas basta compararlo con un barómetro patrón y llevar en cuenta ó suprimir por la corrección con el tornillo, el error de índice **a**.

177. Para concluir, notemos que al aplicar la fórmula de Laplace (2) cuando se ha obtenido la presión por el aneroide de la manera acabada de explicar, el último término, que no es otra cosa que el logaritmo de la relación entre las alturas barométricas reducidas á una misma temperatura, se convierte en

$$\log\left(\frac{H_o}{H_z}\right)$$

que es el logaritmo de la relación entre las dos alturas barométricas reducidas á la misma temperatura: la de cero, y la fórmula será:

$$Z = 18393\left(1 + \frac{2(t_z + t_o)}{1000}\right)\log\left(\frac{H_o}{H_z}\right) \ldots\ldots (5)$$

Las temperaturas t_z y t_o son las del aire en las dos estaciones y H_o H_z las alturas á 0° que da el aneroide.

178. *Precisión alcanzada con el aneroide.*—El barómetro normal para Ingenieros, en los últimos años se ha mejorado grandemente y el error medio de un desnivel es comparativamente corto.

En Austria y Baviera la nivelación barométrica es muy usada en los trabajos oficiales para la delineación topográfica del terreno.

En los levantamientos topográficos preliminares hechos por el Gobierno alemán para obras de ingeniería, se considera demasiado costoso usar niveles, y solamente para la locación definitiva de los ferrocarriles, canales, etc., el relieve y contornos á lo largo de la línea se determinan con nivel de burbuja. Para fines generales se prefiere la nivelación con aneroide.

En la Alemania del Sur, en Suiza y en Austria, el método de medidas barométricas con observaciones correspondientes, se emplea generalmente para la configuración, y líneas niveladas con niveles de burbuja se determinan á lo largo de las vías de comunicación.

Los aneroides más usados para nivelaciones son: el de Vedi-Naudet que construye este último; el de igual tipo fabricado por Goldschmidt en Zürich; el mejorado de J. H. Reitz construído por Deutschlein en Hamburgo y conocido por aneroide Reitz-Deutschlein. Los dos últimos tienen microscopio para las lecturas de 1^{mm}.

Según experiencias hechas por el Profesor Koppe, con un aneroide Naudet cuya escala circular tenía un diámetro de $0^{m}.12$, en 248 estaciones de alturas conocidas por una nivelación exacta, el error probable de cada determinación fué de $1^{m}.1$.

Las comparaciones directas dieron los siguientes resultados.

114	errores	comprendidos	entre	0^{m}	y	1^{m}
70	„	„	„	1	y	2
47	„	„	„	2	y	3
14	„	„	„	3	y	4
3	„	„	„	4	y	5

El mayor error observado fué de $4^{m}.4$. Las experiencias se hicieron en condiciones análogas á las que se encuentran comunmente en la práctica.

Schoder (Hülfstabellen zu barometrischen Höhenmessungen) da el error probable del aneroide Naudet de 12 centí-

metros, basándose en 47 observaciones, como de $0^m.94$ para diferencias de nivel entre 0 y 113^m.

Si recordamos que los errores no se acumulan sino que afectan aisladamente á cada punto, se verá que este error es aceptable para muchos trabajos topográficos.

Según Rühlmann, la distancia horizontal entre el barómetro estable y el de campo no debe pasar de 37.5 kilómetros. Bauernfeind da 60 á 75 kilómetros como límite en tierras bajas y siempre que no medie una línea de alturas entre las estaciones barométricas.

Estos pequeños errores en el empleo del aneroide debe entenderse claramente que sólo ocurren usando los mejores y de mayor tamaño que clasificamos en la 3ª clase, y haciendo observaciones simultáneas en puntos poco alejados entre sí. Igualmente debe observarse que para nivelaciones barométricas de esta exactitud, la frase: nivel del mar, no es ya vaga sino precisa y corresponde al *nivel medio* del mar; pero como nivelaciones de precisión han probado el hecho de que el nivel medio es diferente en diferentes puertos (varios decímetros), ha sido necesario adoptar un nivel medio del mar que satisfaga al mayor número de niveles medios de varios puertos.

En la Alemania del Norte se ha usado el nivel medio de Amsterdam. Un punto en el Observatorio de Berlin á 37 metros sobre la marea media del puerto citado, es el plano de referencia de los levantamientos prusianos (1).

Termobarómetro ó Hipsómetro.

179. Este instrumento da también á conocer la presión atmosférica, y en consecuencia la altitud de una estación, fundándose en la ley bien conocida que se enuncia diciendo: *la temperatura de ebullición de un líquido depende de la presión á que éste se encuentra sometido en su superficie*—y por lo tan-

(1). Coast Survey Report. 1891, pág. 677.

to consiste el instrumento esencialmente en un termómetro que da la temperatura de ebullición de un líquido, el agua, que hierve bajo la presión atmosférica. Como se sabe, el agua destilada hierve á 100° del termómetro centígrado ó á 80° del Reaumur ó á los 212° del Farenheit, cuando la presión atmosférica es de 760^{mm} del barómetro de mercurio.

El hipsómetro consiste, además del termómetro, en un recipiente cilíndrico de cobre, sostenido por tres pequeños pies (figura 102) ó por una lámina cilíndrica con taladros para dejar pasar el aire necesario á la combustión del alcohol de una lamparita que calienta el agua contenida en el cilindro, la cual se introduce por un agujero F que después se cierra herméticamente por medio de un tornillo.

Sobre la tapa del receptáculo se levantan tres cilindros dobles que se deslizan uno dentro de otro como los de un telescopio. En el eje de estos cilindros se dispone verticalmante el termómetro E.

El vapor producido asciende bañando perfectamente todo el termómetro y baja luego por el espacio entre los dobles cilindros hasta salir por el orificio G, con cuya disposición se evita el desperdicio de calor por radiación. Colocado el termómetro en su sitio y de modo que el recipiente del mercurio no penetre en el agua, sino que diste un poco de su superficie (1), se enciende la lámpara y en pocos momentos la ebullición se produce, asciende la columna de mercurio, oscila un poco hacia el límite de la altura definitiva que debe marcar, y por último se fija en un punto, señalando sobre la escala del termómetro (que va grabada en el cristal mismo que lo forma) la temperatura fija de ebullición del agua en el lugar y hora de la observación.

El termómetro generalmente está graduado de 85° á 100°

(1) Si el agua no es destilada el receptáculo del termómetro debe estar fuera del agua cerca de su superficie, para dar la temperatura del vapor, que es la misma de ebullición del agua destilada. Si es de esta clase puede sumergirse el receptáculo del mercurio en el agua.

centígrados (con lo cual se pueden observar altitudes hasta de cerca de 5000 metros), y el grado está dividido en décimos. Por apreciación pueden obtenerse fracciones del décimo de grado.

A la vez que se toma la temperatura de ebullición, con otro termómetro debe tomarse la ambiente.

En resumen: el hipsómetro no es sino otra forma del barómetro, con la ventaja de ser muy sencillo y estar ménos expuesto á cambios que los barómetros de mercurio y aneroide, sea por la introducción de aire á la cámara de los primeros, sea por irregularidades en el mecanismo de los segundos.

180. El procedimiento para el cálculo de las alturas es el mismo ya explicado, desde el momento en que de la temperatura de ebullición se deduzca la presión atmosférica, lo cual es fácil sirviéndose de tablas calculadas para este efecto. (Véase la tabla núm. 5 del fin de este tomo.) Es indispensable usar un termómetro comparado con el que se hayan hecho observaciones hipsométricas, cuyos resultados se hayan comparado con los dados por un barómetro patrón en estaciones á diferentes alturas; si es posible de centímetro en centímetro de la columna barométrica, reducida á 0° (1). El procedimiento de comparación es semejante al explicado para los aneroides; pero llevando en cuenta que la corrección es una función de la forma $\varphi = a + b\,t$; en la que a es un error constante ó de índice, b un coeficiente, y t la temperatura del hipsómetro. a y b se determinan por dos comparaciones, ó mejor aún por varias que se combinan por el método de los mínimos cuadrados. La lectura debehacerse en el punto donde la columna de mercurio alcanza su mayor altura; para evitar el que este punto se alcance en un momento que no sea el mismo de observación, se usan termómetros de máxima. Nótese, por el examen de la tabla, que un vigésimo de grado más

(1) Schiavoni, Principii di Geodesia.—A. R. Clarke, Geodesy.—Díaz Covarrubias, op. cit.

ó menos corresponde á un milímetro de presión. Esto indica la necesidad de leer la escala del termómetro con sumo cuidado.

Hemos repetido que las condiciones meteorológicas hacen variar las indicaciones de los barómetros. Para independerse de ellas es necesario seguir, cuando se pretenden resultados muy exactos, un gran número de observaciones para tener un promedio exento de la variabilidad de dichas condiciones. Si se trata de desnivel entre dos puntos relativamente cercanos, deben hacerse observaciones simultáneas en ambos, confiando en que, de este modo, obrando en una y otra iguales causas, el resultado será independiente, ó al menos poco influenciado por éstas. Si no es posible alguno de los medios señalados, debe observarse hacia el medio día, á cuya hora la calma es generalmente más completa en la atmósfera y la presión se acerca á la media de las presiones del día.

PARTE TERCERA.

MEDIDA DE LÍNEAS Y MEDIDA DE ÁNGULOS.

CAPÍTULO IX.

Medida directa de las líneas. Bases.

181. La medida directa de una recta, determinada, ya sea materialmente sobre el suelo, ya por una visual dirigida por cualesquiera de los medios visadores explicados en la Primera parte, es, en teoría, una operación bien sencilla pues la aplicación material de la unidad de medida sobre la línea por medir, colocando aquella cada vez en el punto terminal de su situación anterior, es cuanto se requiere para conocer el número de veces que la longitud incógnita encierra á la conocida.

Pero en la práctica, además de que muchas veces es imposible la medida directa, es siempre bromosa y delicada la ejecución material del trabajo. Cuando se desea mayor precisión en la medida se hace su ejecución más dilatada en una proporción rápidamente creciente.

La medida directa de las líneas se hace principalmente con dos fines: ó bien se desea conocer la longitud de uno de los lados de un triángulo de la cadena trigonométrica (*la base*) para calcular, con los datos angulares necesarios, las longitu-

des de los otros lados de la cadena y deducir en último término las coordenadas de los vértices que resolverán el problema topográfico, ó bien se miden líneas relativamente cortas, para formar los detalles de un plano cuyos puntos principales se han fijado por procedimientos más exactos.

En el *primer caso*, el error cometido en la medida de la línea se transmite á todas las distancias calculadas partiendo de ese dato, y desde luego se comprende que la medida debe ejecutarse: I. Siguiendo un método que permita conocer el error probable de la medición, esto es, repitiéndola. II. Empleando un instrumento y un método de medida que permitan alcanzar el grado de exactitud necesario.

En el *segundo caso* (dentro del cual comprendemos la medida de lados de pequeños polígonos) por razón de la menor exactitud necesaria, por la vaga determinación de detalles, como bordes de ríos, caminos ó límites de tierras de labor, ó por ser éstas medidas de interés secundario en los planos, etc., basta una simple medida, el empleo de un instrumento menos delicado y un modo de medición más expeditivo. En la medida de los lados de polígonos se tienen que seguir procedimientos de poco rigor relativo, pues si fuera necesario por la gran extensión de sus perímetros hacerlos exactos, valdría más acudir á la triangulación. No es de este lugar exponer el procedimiento para fijar la relación entre la precisión que se desea en las posiciones de los vértices y la que para lograrla haya de tener la medida de las líneas; aquí nos bastará examinar el modo de medir una línea para dar al valor obtenido la exactitud deseada por el Ingeniero al emprender la operación. Entiéndase que nos referimos al caso en que ésta se ejecute con los cuidados necesarios.

De aquí el orden que seguiremos en nuestra exposición: partiremos de la medida más tosca para llegar á la más perfecta dentro del campo de la Topografía y aun nos extenderemos á indicar procedimientos más exactos y propios de la Geodesia, porque el conocimiento de cómo se ejecutan las

medidas más precisas puede sugerir ideas para mejorar las de menor rigor.

182. Veamos ante todo la manera de trazar sobre el terreno una línea recta, ó por mejor decir, la intersección con el suelo de un plano vertical que pase por dos puntos dados. A dicha intersección se llama *un alineamiento recto.*

El fenómeno de la propagación de la luz en línea recta es el que nos da la base para llevar á cabo semejante operación.

Sean A y B los dos puntos extremos de la línea por medir, y supongámoslos sobre un terreno horizontal. No pudiendo hacerse la medición de la distancia con una sola unidad de medida, habrá que transportar ésta sobre la línea que une los dos puntos A y B, y para marcar las posiciones de la unidad habrá que señalar puntos intermedios convenientemente separados.

Colocado el ojo del observador en la vertical de A visa el punto B á la simple vista, por medio de una alidada de pínulas, de un prisma ó de un telescopio. Supongamos la observación á la simple vista y que en B hay una señal: estaca, bandera, etc.

El rayo de luz que parte de B y hiere al observador en A, es una línea recta, y entonces es claro que si colocamos una señal entre A y B, ocultará la B, siempre que se disponga exactamente en un punto de la recta A B, ó por mejor decir, siempre que no esté desviada de A B una cantidad tal que el ojo se aperciba del desalojamiento.

La señal B debe tener un espesor tal que sea bien visible desde A, pero sin ser demasiado gruesa para que no haya vacilación sobre cuál es el eje de la señal. Igualmente el espesor de la ó las intermedias debe ser el mínimum posible para evitar que oculten un ángulo relativamente grande.

Si la observación se hace á ojo, conviene auxiliarse de un hilo á plomo suspendido delante del observador, de modo que corte por su eje la señal B, y sucesivamente á todas las intermedias que quedarán contenidas en un plano vertical.

Esta manera de proceder es indispensable en terreno ondulado, en que algunas señales quedarían abajo del rayo visual A B.

Si se usa algún visador, se instala de modo que su línea de colimación esté contenida en el plano A B, para lo cual se marca por una plomada la proyección de un punto de la línea de colimación sobre el suelo, proyección que representará el punto A, y se visa el B haciendo que el crucero de hilos de la retícula ó la pínula objetiva corten la señal. En seguida se hace que un ayudante coloque una estaca de madera de cosa de un metro de largo, que se llama *jalón*, próximamente en la línea, y luego por medio de señales convenidas hace que el ayudante se mueva á uno ú otro lado hasta poner la estaca, ó al menos su pie, de suerte que su imagen caiga en la intersección de los hilos. Sucesivamente se fijan así varios puntos que estén separados entre sí más ó menos, según el método de medición adoptado, como explicaremos adelante.

183. Si la longitud de la línea es tal que no pueda trazarse fácilmente de una extremidad de aquella, puede hacerse nueva estación en un punto intermedio; visar A, girar 180° el instrumento para rectificar si se ve B, ó bien mover el anteojo en un plano vertical para visar B y poner nuevos puntos intermedios. Esto no se ofrecerá generalmente porque las líneas que se eligen para bases no necesitan ser tan largas, pero puede ofrecerse trazar un alineamiento de lindero á través de terrenos escabrosos ú ondulados, sin que sea posible de un punto A ver el más lejano B que se quiere situar, como lo muestra la figura 103 en la cual las líneas puntuadas representan las visuales dirigidas, con el visador sostenido por un tripié, á las estacas clavadas en el suelo en cada estación c, d.....

Al disponer las señales en un alineamiento, pueden quedar desalojadas de éste un ángulo igual al de límite de agudeza de la vista sin que lo perciba el observador; en otros términos: pueden aparecer como sobrepuestas las imágenes de las

estacas y no estarlo realmente, formando, en consecuencia, las proyecciones de las líneas de unión, una línea quebrada en lugar de una recta. Como dato numérico haremos notar que el error á la simple vista, que vimos puede llegar á 90″, á una distancia de 100 metros produce ya un desalojamiento lateral de 0^m044. Con un anteojo de aumento A el error, como recordaremos, se reduce á $\frac{90''}{A}$. Al alinear estacas á la simple vista deben visarse tagencialmente por uno y otro lado, para lo cual es indispensable sean todas de un grueso igual; al alinear con anteojo es mejor visar al eje de cada estaca en su pie, y hacerlas proporcionalmente más delgadas.

Generalmente, como veremos en el tomo 2º, se desea conocer, no la distancia entre dos puntos, sino su proyección horizontal.

Si el terreno en que se mide es de pendiente uniforme, se puede medir sobre ésta y reducir la línea al horizonte por la fórmula

$$h = a \cos \alpha$$

en la que h representa la proyección de la línea, a la longitud encontrada y α el ángulo que forma con el horizonte.

184. Si la pendiente del terreno es variable, es más cómodo hacer la operación llevando horizontalmente el longímetro (1) (figura 104), y entonces desde luego se conoce la proyección A B de la línea A B′.

185. *Errores en las medidas de las líneas.*—Al efectuar la operación de medida de una línea, como en general al efectuar otra cualquiera, se cometen dos clases de errores: los *regulares ó sistemáticos*, y los *irregulares ó accidentales*. Los primeros son aquellos que obran siempre en el mismo sentido, ó que son de igual signo; y los segundos son los que obran en uno ú otro, ó que son indistintamente positivos ó negativos, y poco más ó menos de la misma intensidad.

(1) Con este nombre genérico designan muchos autores los instrumentos que sirven para medir directamente líneas rectas.

En la medida directa de una línea se pueden cometer los errores de una y otra clase siguientes:

I. *Error de longitud del instrumento;* que consiste en considerar que el longímetro en uso tiene una longitud dada, y no ser esto rigurosamente exacto. Por medio de comparación con un patrón se reduce á un mínimum, pero es evidente que no puede contarse con que se anule por completo. Es un error sistemático.

II. *Error de alineamiento* del longímetro; esto es, que no disponiéndolo exactamente sobre la línea recta sino sobre una quebrada, por los inevitables límites que tiene la potencia visual y la habilidad material, se obtiene para la línea una longitud mayor que la real. Este error, siendo siempre de igual signo, es de la categoría de los sistemáticos.

III. *Error de inclinación.* Se pretende colocar el longímetro, ya sea con una inclinación determinada, ya horizontalmente. En el primer caso, puede el error ser de uno ú otro signo; en el segundo siempre tendrá por efecto hacer aparecer la línea como más larga de lo que es, pues equivale á medir una línea inclinada y tomarla como horizontal.

IV. *Error de flexión.* El longímetro, bajo la acción de la pesantez, toma forma distinta de la recta, y los extremos de la curva distan sólo la longitud de la cuerda y no la del arco. Es un error cuyo efecto es igual al del error II.

V. *Error de elasticidad.* En los longímetros que se someten á un esfuerzo de tracción, la medida se alarga ó acorta, según la intensidad del esfuerzo. El efecto generalmente es acusar longitud menor para la línea, que la verdadera, por ser más frecuente el alargamiento que la contracción.

VI. *Error de índice,* que consiste en la falta de rigurosa coincidencia entre el punto terminal de una medida y el inicial de la siguiente. Es de la categoría de los accidentales.

El ideal sería anular cada uno de estos errores; no siendo posible, se procura disminuirlos por los medios que explicaremos al hablar de cada género de medición; allí veremos

que se multiplica enormemente el trabajo conforme se va exigiendo la citada diminución y que es posible llegar á resultados de la mayor exactitud.

Entre los amplios límites de precisión que es dable alcanzar, el topógrafo elige la que á su caso conviene, basándose en consideraciones que expondremos al tratar de la triangulación y poligonación, y procede á la medida con el instrumento y de la manera apropiados para no salir del límite de error que previamente se fijó.

Empezaremos por lo medios de medida menos precisos y terminaremos por los más exactos.

186. El *pedómetro* (fig. 105) es un pequeño instrumento del tamaño y forma de un reloj de bolsillo, que cuenta el número de pasos de la persona que lo lleva consigo por medio del movimiento alternativo de un peso A que se impulsa hacia abajo hasta el tope, por el movimiento de la marcha, y vuelve á su posición por un resorte. El peso transmite un movimiento angular vertical á la rueda dentada B, y por engranes apropiados va de ésta á una manecilla que marca en la carátula del pedómetro el número de pasos en contadores de unidades, centenas y millares. La carátula debe disponerse vertical. El gancho G lo fija en el borde del bolsillo en esa posición. Un botón F vuelve la aguja de la carátula al 0.

Los errores II, III y sobre todo el I, que es cantidad muy variable en el mismo individuo cuando varía la velocidad, la naturaleza del piso, etc., son de tal magnitud, que este instrumento sólo sirve para reconocimientos rápidos é imperfectos. Excusado es decir que no hay que trazar alineamiento cuando se usa del pedómetro, sino simplemente se procura seguir la línea recta lo mejor posible.

187. Igual concepto, ó poco menos, debemos formarnos del *troquiámetro* ú *odómetro*, instrumento destinado á contar las vueltas de una rueda de circunferencia conocida, que se hace recorrer la línea por medir. El conjunto de rueda y contador de vueltas suele designarse con el nombre de *perambu-*

lador. El troquiámetro consiste en un tornillo sin fin (fig. 106), sobre el que engranan dos ruedas dentadas sobrepuestas y de igual circunferencia. Una tiene 100 dientes y 99 la otra, y ambas un taladro central que deja pasar un pivote fijado por un extremo á un block de bronce suspendido de un eje, el mismo que lleva el tornillo sin fin ya citado. El eje va horizontal y sus extremos están fijados á un bastidor ó marco rectangular de bronce, de unos $12^{cm} \times 6^{cm}$ que se une convenientemente á la rueda, colocándolo dentro de la caja que se ve á la derecha de la figura.

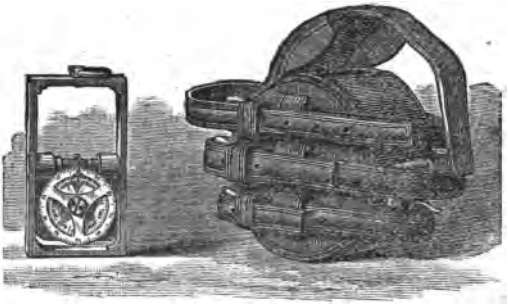


Fig. 106.

Se comprende que si gira el bastidor alrededor del eje del tornillo, describirá cada uno de sus puntos un plano vertical; el block ó peso permanecerá inmóvil, y el tornillo girará con el bastidor haciendo avanzar por su movimiento un diente á ambas ruedas, que pueden moverse, como explicamos, alrededor de su centro. Numerados los dientes de una rueda de 1 á 100, un índice señalará el paso de cada diente, ó lo que es igual, el número de revoluciones por el de dientes que pasaron frente al índice. Como la otra rueda tiene 99 dientes, al cabo de 100 revoluciones del bastidor la primera habrá señalado 100 y la segunda habrá hecho una revolución entera (99 dientes), más 1 diente, y los ceros de las ruedas que estaban al principio uno frente del otro diferirán ya una división. Por consiguiente, el contador exterior será de 1 á 100

revoluciones, y el interior por cada división que se desaloje respecto á la otra rueda indicará un centenar de vueltas del instrumento.

Para usarlo se fija sobre una rueda, de modo que el eje del tornillo sea paralelo al de la rueda perambuladora. El bastidor sigue el movimiento de ésta, y si se conoce su circunferencia bastará multiplicar su desarrollo por el número de vueltas.

Con los perambuladores se cometen los errores I, II y III.

La circunferencia de la rueda aumenta por la arcilla que se le adhiere en ciertas condiciones del suelo; se miden líneas sinuosas en vez de rectas, y da la rueda el desarrollo de todas las inflexiones verticales del terreno. Comunmente las ruedas tienen de 3^m á 5^m de circunferencia.

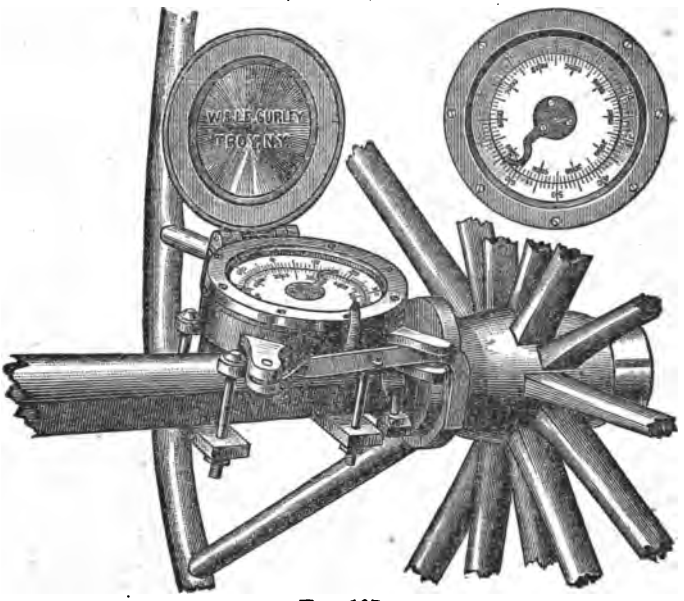


Fig. 107.

Hay otros modelos de perambuladores como el representado en la figura 107, pero substancialmente el instrumento es el mismo, y sólo se usa para la formación de croquis ó de

itinerarios militares (1). La Comisión Geográfica Exploradora lo ha usado con buen éxito para formar redes de polígonos sobre las vías de comunicación entre puntos situados por sus coordenadas geográficas determinadas por la misma Comisión.

A la categoría del instrumento que venimos estudiando (como medidores de líneas), pertenecen los varios ideados para levantar itinerarios, inscribiendo automáticamente los resultados, sea sobre una placa ó sea sobre un cilindro que se mueven mediante la rotación de las ruedas que soportan el mecanismo.

El desarrollo conocido de la circunferencia de una de estas ruedas, modificado proporcionalmente según la escala, se marca sobre un papel con todo el error común á los perambuladores, aumentado del producido por la transmisión, siempre imperfecta, de un movimiento y por el del estilo que graba la línea.

Por tal motivo deben considerarse estos instrumentos, bajo el punto de vista del error en la medida de las líneas, como más imperfectos que el perambulador común.

188. El *cordel de agrimensor*, que la costumbre ha hecho en nuestro país, de 50 varas mexicanas (41^{m}90) puede considerarse á continuación de los instrumentos anteriores, y está sujeto á todos los errores citados; pero muy particularmente lo hace imperfecto la gran elasticidad del filamento que lo forma y la cual produce notables variaciones en su longitud.

La humedad hace también encoger los cordeles, y para disminuir en lo posible este efecto se enceran perfectamente.

A la categoría del cordel, pertenecen *las cintas*, de todos conocidas, que se enrollan en una caja cilíndrica. Su tejido de lino está igualmente expuesto á extensiones y contracciones producidas por la humedad, por las tracciones á que se

(1) Entre estos instrumentos debe mencionarse el de Wittman, con rueda de 1 m. de circunferencia y cuatro contadores.

someten con el fin de disminuir la catenaria formada al suspenderlas, etc.

Se ha procurado disminuir estos defectos, intercalando alambres en el tejido y cubriéndolo de un barniz impermeable.

Las más usadas son de 20 á 40 metros, divididas por una cara en centímetros, con cifras negras que indican los decímetros completos, y rojas que señalan los metros, y en la otra cara en varas y pulgadas mexicanas. Para el levantamiento de interiores de edificios éste es el longímetro generalmente usado.

189. La *cadena de agrimensor* está formada de trozos de alambre de hierro ó de acero, unidos por argollas de hierro ó latón, y termina en sus extremos por dos empuñaduras de formas muy variables (figs. 108 y 109).

La cadena métrica comunmente es de 20 metros; las argollas de unión distan de centro á centro 25 centímetros y cada cuatro eslabones la argolla es de otro metal, ó tiene una plaquita suspendida para marcar los metros enteros.

En los Estados Unidos se emplea la cadena Gunter, formada de 100 trozos de alambre, llamados *links*, y que tienen en total una longitud de 66 pies ingleses, ó cuatro *rods*. Ochenta cadenas hacen una milla, y el cuadrado que tiene 10 cadenas por lado es *un acre*.

Esta cadena se emplea, por la última relación, para medidas de tierras. En los ferrocarriles se usa más comunmente de 100 pies. La "Coast Survey" emplea como medida la métrica y no la inglesa.

La medida con cadena está sujeta á todas las causas de error referidas. Los eslabones se hacen elípticos por las tracciones á que se someten, y se altera permanentemente su longitud. Pueden cometerse errores de varios centímetros por cadena.

Para medir el error de que es susceptible la cadena de agrimensor, Moynet ha hecho experiencias en Elba, y sólo encontró un error de 0^m56 sobre una base de 5165^m82 (1).

(1) Francœur, Geodésie, pág. 131. Nota 2ª

Este resultado me parece excepcional y no debe esperarse de la cadena, de la manera rápida que con ella se opera, semejante precisión, como adelante veremos.

190. El *resorte de acero* (figs. 110 y 111) es en un todo semejante á la cinta, de la cual difiere por el material de que está formado, el cual cede menos á las tracciones ejercidas en las asas, y por lo mismo proporciona mayor exactitud que los instrumentos descritos (2).

Todos ellos, á partir de los cordeles, son de rápido empleo, y por tanto usados para el levantamiento de detalles, en los cuales, como hemos dicho, no se pretende una gran exactitud. En este caso el alineamiento sobre la dirección se hace á la vista, la horizontalidad igualmente se busca al tanteo ó se mide siguiendo la pendiente conocida, y se procura llevar una tensión constante y disminuir la catenaria en lo posible. El término de cada medida se señala clavando en el suelo una pieza de alambre de unos 35 centímetros de longitud, con punta aguda en un extremo y un ojo en el otro, llamada *ficha* (figs. 112, 113 y 114), que recoge el ayudante que lleva el extremo posterior del longímetro, después de utilizar ese punto terminal de una medida como inicial de la siguiente. La ficha (113) lleva un peso de plomo para hacerla caer bien verticalmente cuando se separa del suelo la extremidad del longímetro donde se clava la ficha. La 114 tiene la ventaja de estar numerada é indica cuántas fichas van colocadas sobre la línea medida.

Las cadenas y resortes, por su peso, considerable relativamente, y su gran longitud, no pueden tenderse hasta formar una línea recta, sino adoptan bajo la acción de la gravedad la curva llamada catenaria, y la distancia entre los puntos 0 y final del longímetro es la cuerda en vez del arco. Considere-

(2) En la figura izquierda de la 111 se ve un instrumento A B, llamado dinamómetro, del que hablamos detalladamente en el número 195. Las figuras explican claramente la manera de enrollar el alambre ó cinta de acero cuando no se opera con ellos.

mos este como de círculo (pues la diferencia entre las cuerdas de ambas curvas es bastante pequeña para no contar la enrelación con las otras causas de error) y sea $2l$ su longitud; f la flecha C D (fig. 115); R el radio; 2α el ángulo en el centro expresado con el arco del radio 1.

Tendremos:

$$2\alpha R = 2l \quad ó \quad \alpha = \frac{l}{R} \quad y \quad \cos\alpha = \frac{R-f}{R}$$

pero $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ siendo α un ángulo pequeño, de donde:

$$\frac{R-f}{R} = 1 - \frac{l^2}{2R^2}$$

de donde:

$$R = \frac{l^2}{2f} \quad y \quad \alpha = \frac{2f}{l}.$$

Se sabe que para arcos pequeños, la diferencia entre el arco y su seno es de un sexto del cubo del arco. El error que resulta de tomar el arco A C B, en vez de la cuerda A B, es para nuestro caso

$$\varepsilon = 2R.\frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{8}{3}.\frac{f^2}{2l}$$

Si suponemos una cinta de 20^m y f de 20^{cm} ó sea $f = 0.02$ el error es de $0.000267 \times 2l$; unos 5^{mm} en 20^m. Si la flecha es doble, el error es cuádruplo (1).

191. Las *cañas* ó *bastones* son unas veces verdaderas cañas lacustres ó bastones de madera de sección circular ó poligonal, de 3 metros de largo, divididas en centímetros y terminados con casquillos de fierro ó latón. Es ventajoso que tengan los bastones dos graduaciones en distinto sentido. En Alemania se usan bastones hasta de 5 metros, pero tan largos así, están expuestos á torcerse, aunque si se logra evitar este defecto son, en lugares planos, más expeditivos que los de 3 metros. En México no se emplean estos longímetros no

(1) Erede, Topografía, 1894, pág. 50.

obstante las grandes ventajas que proporcionan, como pronto veremos.

Para medir se necesitan dos cañas ó bastones. Supongamos primeramente que el terreno sea plano y horizontal. El operador, estando en el punto de partida coloca en tierra un bastón en la dirección del punto de llegada; coloca en tierra el segundo bastón á algunos centímetros del primero y lo dirige bien hacia el punto de llegada. Después lo desliza suavemente hasta tocar el primero sin chocarlo. Hecho esto, levanta el primero y dice en voz alta: *uno*, y sigue adelante después del segundo, etc.

Si la medida es muy larga, es bueno indicar el alineamiento con estacas intermedias, ó mejor aún guiarse por un cordel muy bien estirado, según el alineamiento. Si el último tramo, como sucederá comunmente, es menor que una regla, se lee en ella el número de centímetros correspondiente al tramo final.

Si el terreno es de inclinación variable, se coloca la primera caña horizontal, sea á vista ó con un pequeño nivel esférico, se alínea y mantiene el extremo que no apoya en el suelo por un operador que lo sostiene ayudado de un bastón que coloca vertical ó por medio de una plomada; se marca en el suelo el lugar de proyeccion de la punta de la primera caña para que en el mismo sea el de partida de la segunda (véase figura 116 para conocer una buena disposición usada en terreno inclinado para mantener la regla horizontal).

Pueden con los bastones cometerse los errores I, II, III y VI. El último proviene de hueco entre las reglas ó de un choque al colocar la delantera.

192. *Examen de las causas de error.*—Hemos visto que pueden cometerse errores sistemáticos y errores accidentales. El desideratum es anularlos ó al menos reducirlos á un mínimum, lo cual se consigue con el esmero en las operaciones de medición material. Examinemos cada una de las causas de error.

La *primera* se reduce por la cuidadosa comparación del longímetro con un patrón, para conocer la verdadera longitud de aquél. Esa comparación no debe hacerse mejorando las condiciones de la observación, sino antes bien poniéndose en las mismas que hayan de presentarse durante las medidas de campo. Por ejemplo, si se compara un resorte, no debe dársele una tensión que en el experimento sería posible, pero prácticamente irrealizable durante toda una medición. La temperatura debe ser sensiblemente igual á la común en la época que deba ejecutarse el trabajo, etc. Los bastones se prestan á mejor comparación que las cintas y cadenas.

La *segunda*, cuyo efecto es, repetimos, acusar longitud mayor que la verdadera, se disminuye por el cuidado del operador. Vimos ya los límites que la percepción de nuestros sentidos impone, y al hablar de las medidas más exactas tendremos ocasión de examinar las precauciones que se observan para lograr alineamientos perfectos.

La *tercera causa de error* tiene una influencia que nos interesa apreciar en números.

Sea L la longitud del longímetro, α el ángulo que forma con el horizonte y l la longitud de L proyectada sobre este. Tendremos:

$$l = L \cos \alpha = L\,(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\,\alpha)$$

y entonces

$$L - l = 2\,\mathrm{L} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\,\alpha$$

Supongamos L de 10^m y α de $4°$, ángulo ya notable á la vista. En este caso el error $\mathrm{L} - l$ es de $0^m.014$ (1)

La *cuarta causa de error:* la de flexión, vimos ya la importancia que tiene. En las cintas, cadenas y resortes, ya que no se puede anular, sino que obra siempre y con igual signo, de-

(1) En Prusia se ha usado una especie de eclímetro de péndulo que da sobre una escala apropiada la proyección de la longitud del instrumento inclinado.

be buscarse el hacerla constante por la constante tensión aplicada al longímetro, la cual será igual á la aplicada á éste en la comparación con el patrón. En los bastones esta causa de error está suprimida.

La *quinta causa de error* es muy variable con el esfuerzo de tracción, temperatura (cuyo efecto incluimos en este lugar), material del longímetro, etc. Es muy grande en los cordeles, menor en las cintas de lino y prácticamente nula en los bastones.

La *última causa de error* es muy variable, y el cuidado del operador es el único remedio que hay para ella. En los terrenos pantanosos las fichas no quedan sólidamente fijadas, al proyectar en los terrenos inclinados las extremidades de los medidores no caen rigurosamente en el mismo punto el terminal é inicial de las medidas sucesivas, etc.

193. Experiencias hechas por F. Lorber (1) dieron los siguientes resultados: los errores medios *irregulares* ó de signo ya positivo, ya negativo tienen estos valores operando en terreno favorable:

Medida con 2 bastones alineados con cuerda... $m = 0.000535 \sqrt{L}$
„ „ „ „ „ sin cuerda... $m = 0.000927 \sqrt{L}$
„ „ cadena..... $m = 0.003000 \sqrt{L}$
„ „ cinta de acero..... $m = 0.002160 \sqrt{L}$

siendo L la longitud medida y m el *error medio irregular*, lo que demuestra que es más exacta la medida con bastón, sigue la hecha con cinta de acero y por fin la hecha con cadena, estando los errores próximamente en las relaciones:

$$1 : 2 : 4 : 6$$

El mismo Lorber para el caso de un terreno desfavorable da los valores siguientes:

Medida con bastones sin alinear con cuerda.. $m = 0.00333 \sqrt{L}$
„ „ cadena..... $m = 0.01070 \sqrt{L}$
„ „ cinta de acero..... $m = 0.00778 \sqrt{L}$ (2)

(1) F. Lorber, Ingegneria Civile. Torino, 1887. Anno III.

(2) En terreno desfavorable no se operó con cordel, porque no se suele aplicar en esta clase de terreno.

El profesor Jordan (1) da para los errores *medios irregulares* las fórmulas siguientes:

Para las reglas ó bastones..... $m = 0.003 \sqrt{L}$
Para la cadena..... $m = 0.008 \sqrt{L}$
Para la cinta de acero..... $m = 0.005 \sqrt{L}$

que presentan resultados no muy diversos de los obtenidos por Lorber, y que, en todo caso, demuestran la conclusión de comparación relativa entre las reglas, la cadena y la cinta.

Para los errores *sistemáticos* Lorber da los siguientes valores:

Para los bastones..... $r = -0.000085\ L.$
Para la cadena..... $r = +0.000460\ L.$
Para la cinta de acero..... $r = -0.000320\ L.$

El error con la cadena es el mayor y el menor con las reglas.

Jordan para el error sistemático ó regular en las medidas con reglas, cadena ó cinta, da un valor constante de 0.03 por ciento. (2)

Los dos grupos de causas de error que hemos examinado siendo independientes uno de otro, el error medio de la línea medida, resultado del concurso de los errores citados, tendrá por expresión:

$$\mu = \sqrt{m^2 + r^2} \quad (3)$$

pero en cada caso especial, para tener idea de la aproximación obtenida, conviene considerar las circunstancias en que se ha hecho la medida. Teóricamente el error es menor adoptando longímetros mayores, pero en la práctica con esto se

(1) W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde.—1888.

(2) En el catastro de Wurtenberg para eliminar el error en + (sistemático), se han adoptado bastones un poco mayores de 20 pies (0.037 por ciento) calculándolos de 20 pies.

(3) Liagre.—Calcul des probabilités, pág. 418.

hallan inconvenientes que parece ocioso detallar, pues fácilmente se comprenden.

Los números anteriores nos permiten juzgar el grado de precisión que es dable alcanzar según el longímetro usado, en el supuesto de hacer la operación esmeradamente y de tener el instrumento comparado. (1)

Tomando los números de Jordan, el error medio sobre una línea de cien metros sería:

Con reglas sin cordel..... $\mu = 0^m042$
Con cadena ..... $\mu = 0^m085$
Con cinta de acero..... $\mu = 0^m058$

193. Generalmente una medida de distancia se verifica repitiéndola en sentido contrario. Si en cada medida es admisible un error, preciso es admitir que difieran entre sí los dos resultados, y según la teoría de los errores puede aceptarse una diferencia cuádruple del error medio de una medida. Con esta cifra las máximas diferencias admisibles entre dos medidas de la misma distancia resultarían con los datos de Jordan:

	Para reglas.	Para cinta de acero.	Para cadena.
á 50^m	0.11	0.18	0.24
„ 100	0.17	0.24	0.34
„ 200	0.28	0.36	0.51
„ 300	0.40	0.52	0.64
„ 400	0.52	0.62	0.80
„ 500	0.64	0.76	0.92

Salmoraighi dice sobre esta cuestión (2) ..... "puede sin temor asegurse, que cuando la persona que ejecuta el trabajo emplea el debido esmero, debe con los bastones alcanzar en terreno plano ó casi plano, bien unido, determinaciones cuyo

(1) En las instrucciones catastrales de Baviera se concede en la comparación de las reglas de 3^m, $1^{mm}5$; en las de 5^m, 2^{mm} y en los resortes de 20^m,4^{mm}. En el catastro de Wurtemberg para reglas de 3^m, $1^{mm}3$ y de 5^m, $1^{mm}6$.

(2) Geometria applicatta, pág. 241.

error medio probable esté comprendido en $\frac{1}{1000}$ de la distancia, y con reglas de 5^m, en las mismas condiciones, en $\frac{1}{3000}$. En terreno donde crezcan bastante las dificultades, es muy probable que, aun empleando especial cuidado, el error llegue á valores más elevados. Fijarlos es casi imposible porque el elemento de que principalmente dependen es muy incierto; la habilidad de los operadores no es cosa que pueda reducirse á números."

En la práctica, en la gran masa de medidas topográficas de distancias no se busca una precisión superior á $\frac{1}{500}$; para muchas aun $\frac{1}{200}$ es suficiente. En la práctica se hallan medidas de longitudes que vienen á ser elementos de otras determinaciones más ó menos importantes; otras que quedan aisladas y sirven para fijar el lugar de un punto de la superficie del terreno, de tal modo que conocido el lugar de muchos pueda tenerse un concepto aproximado de la forma de esta superficie. Esos puntos son los llamados de *detalle* de un levantamiento.

Para fijar los de la última clase, expuestos á variaciones y cuyo interés es secundario, bastan los instrumentos descritos y alineamientos rápidos, muchas veces hechos á la simple vista.

Los puntos cuya distancia será elemento para cálculo de otras, requieren que los métodos é instrumentos empleados para saber su separación sean más exactos. A líneas de esta naturaleza se llaman bases topográficas.

194. *Bases.* En casi toda la Europa y en gran parte de los Estados Unidos, los trabajos geodésicos ejecutados á expensas de los Gobiernos respectivos, permiten conocer las distancias entre puntos que han servido de vértices en las grandes triangulaciones, y apoyándose en ellos muchas veces es posible pasarse sin la medida muy exacta de una línea que ya se tiene disponible; pero en nuestro país nada semejante está á nuestro alcance, fuera del excelente trabajo de la Comisión del Valle de México, y es por consecuencia indispen-

sable conocer los instrumentos empleados para medida de líneas con precisión mayor que la que es dable alcanzar por los medios antes explicados.

Vimos los errores que es posible cometer empleando la cinta de acero é hicimos observar el efecto de la catenaria, inclinación, etc., sobre el resultado que este instrumento proporciona. Ahora bien, si se hace que el resorte de acero tenga una tensión constante, la misma que se da en el acto de compararlo con el patrón, y se siguen procedimientos de medida esmeradísimos, se llega á resultados de gran exactitud.

195. Describiré el procedimiento que adoptó Díaz Covarrubias en la medida de las bases topográficas de la triangulación de segundo orden del Valle, tomándolo de la obra tantas veces citada del mencionado autor.

Dice así:

"En esta medida se han usado decámetros de resorte, mantenidos siempre á la tensión de 12 libras, y cuya longitud se ha determinado cuidadosamente, antes y después de la medida, comparándolos con un metro-modelo de latón. Para dar á los resortes la misma tensión durante toda la medida, se han empleado para cada uno dos dinamómetros como el A B (fig. 117 y 111), (1) compuestos de un tubo metálico en cuyo interior hay un fuerte resorte formado de una espiral de acero y provistos de un índice D, que recorre una escala graduada en el mismo tubo, á la orilla de una ranura en donde se mueve el índice. Mientras en la argolla B no se ejerce ninguna fuerza el índice D señala la primera división O, que es el cero de la escala; pero luego que se suspende en ella un cuerpo pesado, ó que se ejerce alguna tracción, la espiral interior del tubo se desarrolla, hasta que la resistencia que opone, equilibra el peso suspendido en B, y entonces el índice D señala el guarismo de la escala que marca el peso."

(1) He modificado las figuras que en la obra citada son dos, reduciéndolas á una sola que da las dos proyecciones, horizontal y vertical de la estaca y dinamómetro en operación.

"Para aplicar este instrumento al objeto que nos ocupa, se han unido las asas *c* del decámetro á la argolla B, y en la otra A se ha ejercido la tracción hasta que el índice de cada uno de los dinamómetros señale la cifra que se desea, siendo evidente que la tensión que sufre el decámetro es la misma que demarcan los índices."

"Las fichas se han sustituído por estacas cónicas de encino de $0^m.35$ de altura y $0^m.08$ de diámetro en su base. En ellas se señalaban tanto los extremos de la línea por medir, como los de los decámetros por medio de rectas finas, trazadas en la cara superior después de fijadas fuertemente en tierra con ayuda de un mazo. El modo de proceder en la medida es el que voy á explicar."

"Dos criados cadeneros llevaban el decámetro N unido por sus extremos á los dinamómetros B, los cuales estaban á su vez ligados á otra estaca E, que apoyada en el suelo permitía dar la tensión. Para comenzar, se ponía una de las asas del resorte en coincidencia con la línea *a b* marcada en la cabeza de la estaca T y que designaba el límite de la base. Entretanto otro criado fijaba otra de las estacas próximamente á 10^m de la primera, dejándola fuera de tierra una parte tal, que su cara superior se encontrara á la misma altura que T, á fin de que el decámetro permaneciera horizontal; y en seguida, bajo la vigilancia inmediata de los ingenieros, luego que por ambas partes se daba la tensión convenida, y el criado de atrás mantenía su asa en coincidencia con *a b*, se señalaba en la cabeza de la otra estaca una línea delgada para indicar el término de la segunda asa del resorte. Esta última línea servía á su vez para continuar la medida hacia adelante, sin desviarse del cordel, que fuertemente tendido señalaba la dirección de la base, y llevando cada ingeniero separadamente un apunte del número de resortes, al paso que se iba practicando la operación. Por lo común bastan diez ó doce estacas de encino, debiendo sin embargo, borrar con frecuencia las líneas trazadas en la cara superior para evitar equivo-

caciones. Este método, ejecutado con esmero, proporciona resultados muy exactos y permite trabajar con bastante rapidez, pues, en nuestras bases, se medían generalmente cosa de 400^m por hora."

"Hasta ahora he supuesto que el resorte tiene exactamente 10^m, y no queda otra cosa más que explicar el método que he seguido para determinar su verdadero tamaño. Para esto se medía con el resorte una longitud cualquiera L, con la misma tensión que se había usado en la base, y con todas las precauciones que hemos indicado, trazando con rectas finas los extremos en las cabezas de las estacas. En seguida, en la misma dirección de L marcada por un cordel, se situaban de metro en metro próximamente, otras estacas á la misma altura que las dos últimas, y se repetía la medida de L, con un metro-modelo de latón, señalando sus extremos en cada estaca con el mayor cuidado, y apreciando las pequeñas fracciones con una regla de marfil finamente dividida en $0^m.0005$. Esta operación se repetía varias veces antes y después de la medida de la base, procurando practicarla á la misma temperatura, para disminuir el error producido por la diferencia de dilataciones del metal."

Una de las bases medidas por el procedimiento descrito lo fué dos veces y dió los siguientes resultados:

Primera medida.....	$2993^m.054$
Segunda medida.....	$2993^m.133$
Cuya diferencia.....	$0^m.079$

es cosa de $\frac{1}{37400}$ de la longitud de la base. Vemos pues, que por este medio se obtienen resultados de gran exactitud.

196. Para medidas cuyo error no llegue al $\frac{1}{20000}$ de la longitud, además del anterior procedimiento, pueden emplearse otros varios que vamos á describir.

Se usan reglas de madera de abeto de sección rectangular, de $0^m.10 \times 0^m.05$ y de 4^m á 5^m de longitud que se construyen

con madera bien seca, limpia, exenta de nudos, labrada al hilo é impregnada de aceite hirviente para hacerla menos sensible á las variaciones higrométricas. Las cabezas de las reglas se guarnecen de conteras metálicas, generalmente de acero.

La figura 118 representa á la escala de $\frac{1}{5}$ las extremidades de dos reglas en contacto. La guarnición metálica de las cabezas es cilíndrica y el contacto se establece según una generatriz.

Díaz Covarrubias para la medida de la base principal de la triangulación del Valle. empleó cinco reglas de madera de pino (oyametl), cada una de poco más de 4^m de longitud y de una sección rectangular de $0^m.06 \times 0^m.05$. Cada regla estaba terminada por casquillos de latón, de una forma tal, que siendo sus extremos de poco más de un milímetro cuadrado, conservaban una de las aristas de la regla en toda su longitud; disposición muy ventajosa tanto para alinear el sistema de reglas y establecer los contactos, como para facilitar la comparación con el metro-modelo y determinar la verdadera longitud de cada regla.

Estas no eran de una sola pieza, sino estaban formadas de varias láminas delgadas de madera ensambladas longitudinalmente lo que, como se sabe, garantiza mejor la rigidez de la pieza. La madera se escogió bien seca y se le aplicaron varias capas de aceite caliente, cubriendo después las reglas con una gruesa capa de pintura al óleo. (1)

197. La figura 119 representa á la escala de $\frac{1}{5}$ la sección vertical de la extremidad de una regla A B de madera encerrada dentro de una caja, de la cual salen un poco los extremos de la regla. Esta es de 4 á 5 metros de longitud, de $0^m.05 \times 0^m.015$ de sección y la caja tiene $0^m.12 \times 0^m.08$ y está formada de tablas de abeto.

(1) Díaz Covarrubias.—Memoria presentada al Ministerio de Fomento, sobre la medida de la base para la triangulación fundamental del Valle de México.

La regla ocupa el centro de la caja y está sostenida por apoyos de madera, y fijada al apoyo central. Una tapa C D E se ajusta en los extremos de la caja de defensa, para cubrir los salientes de la regla cuando se transporta.

Al usar las reglas se colocan horizontalmente sobre sólidos apoyos (estacas, tripiés, etc.) dispuestos al tercio y dos tercios ó al cuarto y tres cuartos de la longitud de aquellas. Para obtener la horizontalidad se emplea un pequeño nivel portátil y poco pesado, semejante al de la figura 77, ó se mide el ángulo de inclinación de la regla por medio de un eclímetro del tipo del representado en las figuras 120 y 128, y consiste en un arco de círculo dividido en grados y cuartos de grado y una plomada P suspendida del centro del arco. La aproximación que puede alcanzarse con estos instrumentos es bastante, pues una desviación de menos de medio grado produce un error inferior al $\frac{1}{20000}$ y es fácil apreciar un cuarto de grado en el eclímetro si su diámetro es de unos 20 centímetros.

Una clase de soportes para las reglas que en último lugar hemos descrito, es el que se ve en la figura 121. Moviendo las cajas en forma de cuñas A y B se eleva ó baja la regla C y puede nivelarse. Es necesario proveer á los soportes de medios adecuados para desalojar las reglas vertical y azimutalmente para que se dispongan en el alineamiento. Observemos que, igualmente, una desviación lateral que no llegue á medio grado no causará un error que alcance á $\frac{1}{20000}$.

La disposición descrita (fig.119) tiene la ventaja de que la regla no queda directamente expuesta á los rayos solares y en consecuencia sus dilataciones y contracciones son menores que en las descubiertas.

198. *Comparación de las reglas.* La determinación de la longitud de una regla es operación que puede ejecutarse con más exactitud que la de los otros longímetros y esta es una de las razones, así como la de ausencia del error de flexión, co-

mo ya dijimos, que les dan la preferencia sobre los otros instrumentos de manejo más rápido.

La comparación debe hacerse entre el metro-modelo y la regla, corrigiendo ambos por la dilatación producida por el calor; esto es, debe determinarse cuál es la longitud de la regla á 0° y cuál el coeficiente de dilación de la substancia que la forma. Conocida la temperatura de observación podrá conocerse la longitud de la regla en el momento que se usó. Para medidas con aproximación de $\frac{1}{20000}$ basta hacer la comparación á una temperatura semejante á la media á que hayan de exponerse las reglas al medir la base.

No todos los operadores están de acuerdo sobre la variabilidad ó la constancia de longitud de las reglas de madera. Así por ejemplo Zach y Plana en la medida de la base de Aix y Turín, se sirvieron de reglas de sabino impregnadas de aceite y barnizadas, creyendo que así se preservaban de las influencias atmósfericas. Zach se fundó para ello en el resultado de experiencias de comparación entre dos péndulos astronómicos, uno de los cuales tenía la varilla de sabino y el otro una metálica compensada. (1) También Porro creyó que el sabino aceitado y barnizado era independiente de las variaciones higrométricas y termométricas. (2)

Por el contrario el capitán inglés Mudge creyó deber renunciar al empleo de las reglas de madera, después de haber reconocido que son alterables cuando se exponen á la humedad atmosférica.

Díaz Covarrubias para la medida de la base citada, y considerando justamente que la madera no hace excepción á la ley general de la dilatación, se propuso determinar el coeficiente para el oyametl de que construyó sus reglas.

Obtuvo para valor del coeficiente de dilatación:

(1) Francœur.—Géodésie, pág. 523.—Nota de M. P. Hossard.
(2) Francœur.—Op. cit., pág. 529.

Según sus propias observaciones..... $m = 0.0000041$
„ las del Sr. M. Fernández Leal.. $m = 0.0000039$
„ „ „ „ F. Herrera..... $m = 0.0000044$
„ „ „ „ M. Iglesias..... $m = 0.0000045$

y adoptó como resultado final, combinando todas las observaciones

$$m = 0.0000042$$

valor muy cercano al dado por Puissant para el pino, del cual se construyeron las reglas usadas en la base de Goldach. (1)

$$m = 0.0000047$$

y al dado por Kaser para el pino blanco de Noruega

$$m = 0.0000041$$

Estas cifras nos hacen ver que una diferencia de 12° en la temperatura modifica la longitud de una regla, por ejemplo de 4^m, en $0^m.0002$, ó lo que es igual puede producir un error de $\frac{1}{20000}$.

Si la diferencia entre la temperatura de comparación y la de operación no llega á 12°, parece á primera vista innecesario llevar en cuenta la dilatación de las reglas si es bastante la precisión de $\frac{1}{20000}$. Esto sería verdad en el supuesto de que la dilatación fuese la sola causa de error; pero como hay las otras que ya conocemos, habrá que disminuir más aún la posibilidad de error sistemático por dilatación, ya que forzosamente se cometen otros errores, y si el de $\frac{1}{20000}$ fuera debido á la dilatación, los debidos á las otras causas: alineamientos, etc., harían la exactitud menor de la fijada como desideratum.

199. La comparación de las reglas con el metro-modelo puede hacerse de varias maneras fáciles de idear. Salmoiraghi describe el siguiente procedimiento: se coloca el metro-pa-

(1) Puissant. Géodésie.

trón en la arista bien recta de una mesa más larga que la regla cuya longitud se trata de medir, apoyando una extremidad del patrón en una pieza de madera C (fig. 122), cuya arista es normal á la de la mesa, y fijada solidamente á ésta. En seguida se coloca en el otro extremo del metro una escuadra S_1 en perfecto contacto con él. Se levanta el metro-patrón, se pone una segunda escuadra S_2 en contacto con la S_1 y de este modo levantando la S_1 el filo de la S_2 está en el lugar mismo que ocupó la extremidad del metro-patrón. Se dispone este de nuevo como al principiar la operación, pero á continuación de S_2, y así se continúa hasta medir tres ó cuatro metros (según la longitud de la regla por comparar) y al final de la medida se fija otra pieza semejante á la C.

La regla por comparar se coloca entre las piezas C, é inmediatamente se notará la diferencia entre la longitud real de la regla y la que se quiso tuviera (3^m, 4^m, etc.), diferencia que se apreciará por medio de una regla finamente dividida. (1)

Para que dé la operación resultados exactos, es necesario tener en cuenta las variaciones de temperatura que modifican desigualmente las longitudes del patrón y la regla, formados de substancias de diverso coeficiente de dilatación.

Sea m este coeficiente para la substancia de que está fabricado el metro-patrón, t la temperatura en el momento de la experiencia, l la longitud del patrón á una temperatura dada que fué aquella á la cual se selló, generalmente á 0°, y L la longitud á t grados. Tendremos:

$$L = (1 + m\,t)\,l$$

Para el bronce $m = 0.000019$, para el acero $m = 0.000011$, etc. A la temperatura, por ejemplo, de 25° el metro-patrón tendrá de largo $1^m.000477$ (si era de un metro exacto á 0°) lo que produce en una regla de 4^m una diferencia de $0^m.0019$.

(1) Salmoiraghi. Geom. app., pág. 236.

El número l y la temperatura á la cual se selló el patrón van grabados en él.

En la comparación de la regla se lleva en cuenta su dilatación tomando el coeficiente relativo en una ecuación análoga á la anterior.

Díaz Covarrubias comparó sus reglas colocando el metro-modelo sobre una de ellas haciendo coincidir un extremo del patrón con un extremo de la regla y en esta posición fijó el uno á la otra por medio de un tornillo de presión. En seguida puso un medio metro-patrón en contacto con el metro antes fijado, y aseguró debidamente por otro tornillo de presión el medio metro sobre la regla: Luego que se estaba cierto de los contactos se dejaba pasar un cierto tiempo para anotar la temperatura.

Hecho esto se desprendía el metro entero para volver á fijarlo á continuación del medio metro y así se continuaba la operación. El exceso de la regla sobre los metros enteros se apreciaba con un doble decímetro, provisto de un vernier que apreciaba décimos de milímetro.

200. *Contacto ó separación de las reglas.*—En cuanto al error de índice, último que nos resta examinar, en el caso de las reglas se disminuye cuanto es posible llevándolas á un contacto perfecto, ó mejor aun, midiendo cuidadosamente el espacio que las separa. Es preferible no hacer que se toquen dos reglas colocadas sucesivamente, porque al producir su contacto es fácil chocarlas y desalojar la ya establecida, echando á perder el trabajo ejecutado.

Para el contacto se ha ideado varias disposiciones. Citaremos entre ellas la que consiste en hacer terminar un regla por un medio cilindro de eje horizontal y la siguiente principiar por un medio cilindro de eje vertical para que el contacto se haga en un solo punto, y la disposición consistente en hacer concluir una regla en una arista horizontal y principiar la siguiente por un hilo fino vertical tendido sobre dos apoyos.

201. Para medir la separación de las reglas igualmente se han imaginado multitud de pequeños instrumentos.

Uno de estos está formado por una cuña ó triángulo de marfil que se introduce entre las puntas de las reglas y marca su separación en una escala trazada sobre la cuña.

Con el mismo objeto se usa el compás de precisión A que se ve en la figura 123 entre las reglas B y C, y cuya construcción y manejo se comprende por el examen del dibujo. También se emplean lengüetas que se hacen correr hacia afuera de la cabeza de la regla R y marcan en una graduación *a* la parte que se las hace salir para llegar al contacto con la regla N de que no forman parte (fig. 124).

Para hacer una medida bastarían en rigor dos reglas; pero se prefiere usar 3 ó más, para que si se mueve la segunda quedando fija la primera no sea necesario repetir toda la medida. Al grupo de reglas se llama *una estación.* Se completa esta con los tripiés, estacas ó cuñas de sostén, con el compás ó cuña micrométrica para medir la separación de las reglas con una plomada (si la medida se hace en terreno inclinado (fig. 104) disponiendo las reglas en escala para determinar la proyección del punto último y del inicial de la medida ó sean los extremos de la base) y con un nivel para colocar horizontalmente las reglas ó un eclímetro como los que se ven en las figuras 120 y 128. El grueso del hilo de la plomada, al hacerse medidas en terreno inclinado, debe computarse para conocer la exacta longitud de la línea.

202. *Procedimiento Struve.*—El ilustre geómetra ruso Struve ha ideado otro procedimiento para medir bases, alcanzando la precisión de $\frac{1}{20000}$ y aun una mayor y que tiene la ventaja de poderse seguir en terreno irregular.

Sea A B la línea por medir (fig. 125). Se tiende un cordel fuerte de cáñamo bien torcido de uno á otro extremo de la línea, del modo que representa esquemáticamente la figura, cuidando de mantener el cordel en el plano vertical que pasa por A y B.

En **a b d y e** se colocan tripiés, como los representados en mayor escala en la figura 126, sobre los cuales monta el cor del que de tramo en tramo desciende á fijarse en piquetes co mo **c**, sólidamente clavados en el suelo.

El cordel se alínea por medio de un anteojo colocado en A ó en B.

Es evidente que la longitud buscada es igual á la suma de las proyecciones horizontales de la línea quebrada A. *a. b. c. d. e.* B y en consecuencia bastará tener una sola regla comparada de 3 ó 4 metros de largo, y un eclímetro con el que se medirá la inclinación de cada tramo del cordel. La regla puede ser de madera ó de metal.

En el primer caso se usa una de madera de abeto, de sección rectangular, de 90 × 35 milímetros, con extremidades de metal. En el segundo caso se emplea una varilla cilíndrica de acero G H de 8 milímetros de diámetro, montada sobre una regla de abeto Z Z, como se ve en la figura 127, que representa la regla como se dispone en el acto de medir el cordel. La parte negra indica la varilla, que sobresale por sus extremos de la regla de madera.

La medida de la inclinación del cordel se hace con ayuda de un eclímetro como los de las figuras 120 ó 128.

Para proceder á la medida al cordel se aplica la regla y se marca el extremo delantero en sus colocaciones sucesivas, con una hebra de seda muy fina ó con pequeñas pinzas de tornillo y charnela (fig. 129), que pueden abrirse para montarlas en el cordel y llevarlas al contacto con la varilla y marcar el término de cada medida y principio de la siguiente. Se lleva en cuenta fácilmente el espesor constante de las pinzas para añadirlo á cada tramo. El tornillo **b** las fija sólidamente.

Siendo difícil al llegar cerca de los tripiés ó piquetes usar la regla grande, debe tenerse otra de un metro, dividida en milímetros, para las fracciones menores que la regla grande, y la medida asi se hará con gran facilidad.

Struve dice, que una vez establecido el cordel ha medido

cerca de 450 metros en un cuarto de hora con el error de una pequeña fracción de pulgada. Para obtener la aproximación de $\frac{1}{20000}$ habría sido necesario que el error no excediera de 22 mílimetros, y ciertamente, al decir Struve "pequeña fracción de pulgada" no se refiere á 22 milímetros que son $\frac{4}{5}$ de pulgada próximamente.

Cada tramo de cordón L, tendrá sobre la horizontal una proyección:

$$L' = L \cos \alpha$$

y la longitud A B será la suma de todas las L′

Existen tablas que dan el valor de la proyección de 1 á 10 metros y de minuto en minuto de α, de manera que es fácil obtener las proyecciones para todos los múltiplos decimales de 1 á 10 moviendo la coma y se obtiene la proyección de una serie de longitudes, por medio de una simple suma.

Veamos ahora la influencia del error en la lectura del eclímetro sobre la exactitud del resultado.

La medida de α puede á lo más obtenerse al décimo de grado ó sean 6′ y para investigar el efecto de un error en más ó menos de esta categoría, calculemos la diferencia entre los valores naturales, por ejemplo de cos 1° y cos 1° — 6′; de de cos 2° y cos 2° — 6′; de cos 10° y cos 10°—6′.

Tendremos esta serie de valores:

cos 1°—00′—0.999848	cos 2°—00′—0.999391	cos 10°—00′—0.984808
cos 1°—06′—0.999816	cos 2°—06′—0.999328	cos 10°—06′—0.984503
diferencias — 0.000032	0.000063	0.000305

De aquí se deduce que un error de 6′ es tolerable en el límite de $\frac{1}{20000}$, alrededor de 1°; pasa ya del límite de tolerancia alrededor de los 2°, y alrededor de 10° llega á producir errores en la longitud de la proyección de cerca de $\frac{1}{3000}$ ó poco menos.

De aquí se deduce que en la práctica deberá disponerse el cordel dando á sus tramos la menor inclinación posible y

usarse un eclímetro formado por un arco de pocos grados de abertura, pero de gran radio para poder apreciar inclinaciones con exactitud mayor de 6′, digamos 2′ á 3′, pero aun así, no será prudente ponerse en condiciones de usar ángulos que lleguen á 10°.

Si por la disposición del terreno fueren inevitables las fuertes pendientes, se recurrirá á un procedimiento, complicado en apariencia, pero sencillo en realidad, que consiste en medir por medio de un nivel (1), las diferencias de altura entre todos los puntos de inflexión del cordel y así se tendrá la hipotenusa L medida á lo largo del cordel y el cateto vertical ó desnivel h, de un triángulo rectángulo cuyo lado horizontal

$$L' = \sqrt{L^2 - h^2}$$

será la proyección buscada; y así se evitará el uso del eclímetro.

Por este procedimiento sería menester próximamente un error de 0^m01 en el desnivel de los extremos de un tramo de 40^m para producir un error de 1′ próximamente en un ángulo de inclinación entre los valores 0° á 30°. Ahora bien, un error de 1′, en el caso por ejemplo de 10°, produce otro de $\frac{1}{20000}$ en la proyección. Como es más fácil apreciar desniveles á 1 centímetro de aproximación que leer ángulos con eclímetro con 1′ de aproximación, se ve que el segundo procedimiento es preferible al primero.

Parece excusado decir que la regla debe compararse con un patrón. Para obtener la precisión de $\frac{1}{20000}$ por lo que á la comparación respecta, el error en esta no debe llegar á $0^{mm}25$ en una regla de 5^m y á $0^{mm}20$ en una de 4^m.

Sea cual fuere el modo de medir una base, no debe considerarse completo el trabajo sobre el terreno, sino cuando se hayan ejecutado por lo menos dos medidas de la línea; una partiendo de un extremo de ella y otra comenzando por el

(1) Véase Nivelación topográfica, tomo II.

opuesto, ó mejor aún, cuando se haya repetido varias veces la medida y se deduzca el resultado por la media aritmética de los vários obtenidos.

El método Struve se presta mucho á hacer rápidamente la repetición, pues el trabajo de colocación del cordel es el que en dicho método requiere mayor tiempo.

203. Hechas las correcciones propias de cada medida parcial, y deducida la media aritmética de todas ellas el error medio de la media tendrá por expresión:

$$E = \sqrt{\frac{\Delta^2 + \Delta_1^2 + \ldots\ldots \Delta_n^2}{n}}$$

en la cual Δ, Δ_1, ... Δ_n son las diferencias entre la media aritmética y cada uno de los resultados parciales y **n** el número de valores concurrentes á la media.

Conocido así el error probable de la base, pueden calcularse los de las demás líneas que de la base dependieron; pero este es punto que no debe ser aquí desarrollado.

204. *Bases cuyo error es inferior á* $\frac{1}{100000}$.—Las bases geodésicas se miden con mayor precisión y para aplicarlas justamente ese calificativo su error no debe llegar á $\frac{1}{100000}$. Estas líneas son el punto de partida de triangulaciones de precisión que dan las dimensiones de los arcos de meridiano ú otros círculos del elipsoide terrestre y hacen por tanto conocer la forma y dimensiones del planeta que habitamos.

Numerosos trabajos de esta naturaleza se han llevado á ca- en todos los continentes, sea con fines geodésicos propiamente dichos, sea como fundamento primero y exacto de cartas geográficas, hidrográficas, catastrales, etc., realizándose por los Gobiernos de los países cuyo suelo ha alcanzado gran valor por la densidad de su población ó por la cifra de su producción industrial.

En nuestro país, exclusión hecha de la base del Valle ya citada, no sé que se haya hecho otro trabajo que merezca el

nombre de geodésico y la carta geográfica exacta del Territorio Mexicano está por hacer.

Como noticias de interés histórico citaremos algunas de las bases geodésicas medidas.

En Francia existen muy numerosas. Entre ellas recordaremos las de Melun y Perpignan para la determinación del metro, en las cuales se usaron reglas de platino y de cobre. La de platino servía para la medida, y la de cobre, un poco más corta y sobrepuesta á la otra, y fijada invariablemente á ella por una extremidad, dába, por la diferencia de dilatación entre ambas reglas, la temperatura del aparato y por lo mismo la corrección aplicable á la regla de platino. El intervalo entre las reglas sucesivas se medía por una lengüeta graduada que deslizaba de la manera explicada antes. Reichembach sustituyó á la lengüenta la cuña micrométrica ya descrita.

Las reglas, en número de cuatro, fueron construidas por Borda y las mismas sirvieron para medir las bases de Ensisheim, Brest, Bordeaux, Gourbera, etc., de la carta de Francia. (1)

En Inglaterra Mudge usó reglas de sabino y después otras formadas por un tubo de vidrio de 20 pies de largo; el General Roy una cadena de 100 pies de longitud, sometida por medio de pesas á una tensión constante y soportada por una serie de cajas contiguas, de 20 pies de longitud cada una, sostenidas en tripiés y niveladas.

Estos instrumentos no proporcionan la misma exactitud que los de Borda y otros más modernos como el ideado por Colby para la medida de una base en Irlanda en 1827 y 1828, igual al cual se construyó otro para las bases de Calcuta, medidas por el Coronel Everest de 1834 á 1841.

El aparato Colby se compone de dos barras metálicas: una de fierro forjado y otra de cobre, de un poco más de 10 pies de longitud, ligadas una á otra hacia su medio, de tal manera

(1) Puissant.—Géodésie. El mismo autor.—Base du système métrique.

que las dilataciones se efectúan libremente en ambos sentidos á partir del punto central.

En las dos extremidades, una pequeña palanca transversal, articulada á cada una de las barras, se prolonga del lado del metal menos dilatable; su longitud es tal, que las distancias, contadas desde un punto marcado como índice hacia la extremidad de la palanca hasta el eje de cada una de las articulaciones, están en la relación de los coeficientes de dilatación respectivos de los dos metales.

Resulta de aquí que estos dos puntos forman nodos invariables, y que su distancia, que representa la longitud de la regla, queda sensiblemente constante. Sin embargo, no es posible dejar de corregir por los cambios de temperatura, que influyen por las inevitables imperfecciones de construcción.

Zach y Plana han medido las bases de Aix y Jurin, sirviéndose de reglas de sabino aceitadas y barnizadas.

En Rusia se han medido diez bases con reglas metálicas, sobre un arco de meridiano de más de 26°.

En los Estados Unidos se ha empleado el aparato Colby midiendo la separación de las reglas con dos microscopios, usando unas veces este método óptico y otras uno de Struve, consistente en apreciar el intervalo por una palanca acodada, cuyo brazo menor viene á tocar la regla siguiente, mientras el brazo mayor indica sobre un cuadrante la distancia de las reglas.

El aparato Bessel se empleó por su autor en la base de Koenisberg; por Schumacher en Dinamarca; por el General Akrelle cerca de Upsal; por Baeyer en Berlin y Bonn y por Nerenburger en Ostende, Bélgica. La última tiene un error medio de $\frac{1}{2290000}$. (1)

El aparato Bessel, semejante al de Borda, está formado de cuatro reglas de fierro forjado, cada una de las cuales tiene dos toesas de longitud y está cubierta por otra regla de zinc

(1) Liagre.—op cit. pág. 419.

un poco menos larga, del mismo espesor y de la mitad de anchura de la de fierro. Soldadas y atornilladas por su extremidad posterior, las dos reglas están libres en todo el resto de su longitud y el exceso de dilatación de la de zinc sobre la de fierro sirve para dar la temperatura del aparato y la corrección relativa.

El intervalo entre las reglas se mide con una cuña de vidrio.

205. Todos los aparatos descritos reposan sobre el principio de dejar entre las reglas consecutivas un pequeño intervalo que se trata de medir con gran precisión. El Ingeniero Porro tomando una nueva vía ideó un aparato que pudiera llamarse de *colimación óptica* ó de *microscopios*, con el que se alcanza el límite máximo de precisión permitido por los perfeccionamientos de los instrumentos modernos. (1)

Consiste esencialmente el método Porro en el empleo de cuatro ó cinco microscopios que sucesivamente se colocan sobre sólidos soportes, en la línea de la base, á distancias iguales entre sí é iguales á la longitud de una regla comparada.

Los ejes de los microscopios se hacen verticales por medio de niveles y sus focos vienen á ser los puntos de referencia ó índices fijos, cuya distancia es la que se mide con la regla referida.

Un nivel permite colocar esta horizontalmente, y un anteojo director hace conocer si la regla está en el exacto alineamiento de la base.

Los detalles de la operación no pueden ser expuestos en esta ligera reseña de la medida de las líneas geodésicas, con la cual sólo hemos querido dar una idea de la suma delicadeza y precisión alcanzada en medidas de la naturaleza de las que nos ocupan. Mr. Hossard en la "Nota" ya citada, detalla el método de Porro, y en cuanto al de Bessel, se encuentra des-

(1) Según el distinguido geodesta español General D. Carlos Ibáñez, la idea del uso de microscopios aislados se debe á Hassler.

crito en la obra de este eminente ingeniero "Gradmessung in Ostpreussen" y en las publicaciones del Reale Istituto topografico militare Italiano.

El método Porro ha sido aplicado en Argelia y además en Roma por el P. Secchi, para una medida en la vía Appia.

El General Ibáñez empleó un excelente aparato ideado por él y D. Frutos Saavedra, y que tiene una sola regla formada de dos planchas de fierro laminado unidas en forma de T por medio de escuadras. La temperatura de la regla se conoce por termómetros de mercurio. La longitud de la regla es la comprendida entre dos rayas trazadas en su cara, sobre dos láminas de plata, distantes unos 4^{m}. Por medio de tornillos convenientemente dispuestos en los soportes de la regla se le pueden comunicar pequeños movimientos para disponerla en la dirección que convenga y con la inclinación y altura deseadas y también para desalojarla longitudinalmente.

Los puntos de referencia, cuya distancia se mide por la regla, se determinan por las retículas de microscopios cuya línea de colimación es perfectamente vertical y se hace pasar por las rayas trazadas en la regla. Para detalles completos del excelente aparato Ibáñez y explicación de su empleo, véase la Memoria presentada por el autor al Cuerpo Español de Ingenieros.

CAPITULO X. (1)

Medida indirecta de las líneas.

TELÉMETROS–ESTADIAS.

206. La material dificultad para medir líneas rectas sobre el terreno, el mucho tiempo en esas operaciones invertido, los errores que fácilmente se cometen al ejecutarlas, y más

(1) El distinguido Sr. Salmoiraghi, á cuyas obras mucho debo, se sirvió leer el presente Capítulo que manuscrito le remití. En carta fechada en Milán el 16 de Febrero de 1897 me honró el expresado Ingeniero con las siguientes frases:

aún, la frecuencia de casos en los cuales la medida directa es imposible, han hecho buscar, de tiempo atrás, la manera de conocer la longitud de las líneas sin recorrerlas en toda su extensión.

No nos ocuparemos de medios aptos sólo para proporcionar una ruda aproximación, como por ejemplo el fundado en la velocidad de propagación del sonido, sino que consideraremos únicamente los *geométricos*, consistentes en resumen en la resolución de un triángulo con los elementos angulares y líneales necesarios, que en el caso nuestro son: un lado llamado *base* y dos ángulos.

La *base* que debe medirse se elige muy pequeña para conocer su longitud sin gran trabajo, y como en ese caso el ángulo opuesto á ella resulta muy pequeño preciso será medirlo con gran exactitud.

En la medición indirecta de las distancias tiene el observador la ventaja de no mudar de sitio, y entonces podrá quedar la *estación* del lado de la base del triángulo en cuestión ó del lado del ángulo opuesto á la misma. De esta posición relativa partiremos para clasificar los instrumentos que miden indirectamente las longitudes en dos clases: *los telémetros* y *las estadias.*

Los primeros miden el pequeño ángulo, alejado del operador, que una base más ó menos corta medida del lado de este, subtiende á la distancia por conocer. Los segundos miden el ángulo formado en el lugar de observación, por las líneas que parten de los extremos de una base pequeña y alejada del operador, pero cuya longitud le es conocida.

El fundamento de las estadías está en la propiedad demos-

"Il suo Capitolo sulla "Misura indiretta delle distanze" si inspira alle mie idee in proposito e, dal canto mio, non posso che riconoscerlo anche più soddisfacente del corrispondente paragrafo della mia opera."

(El Capítulo de vd. sobre la "Medida indirecta de las distancias" se inspira en mis ideas sobre la materia y por mi parte, no puedo menos que reconocerlo como más completo que el capítulo correspondiente de mi libro).

trada ya de la proporcionalidad entre las dimensiones homólogas de los objetos, y sus imágenes en el campo de un telescopio.

207. Telémetros.—Sea A B C un triángulo del cual conocemos por medida directa el lado B C = **a** y los ángulos B y C.

Tendremos:

$$A = 180° - (B + C) = \omega$$

Siendo muy agudo el ángulo ω, los lados A B y A C puede aceptarse sean iguales é iguales cada uno á **d** y tomarse el arco ω por su seno.

En el triángulo A B C, que se designa con el nombre de telemétrico, será con los anteriores supuestos:

$$d = \frac{a}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si en esta fórmula suponemos constante el valor de ω, las variaciones de **d** serán dependientes de las de **a** y directamente proporcionales á éstas, y si al contrario, **a** es constante, variará **d** en razón inversa de ω.

Los telémetros pueden reducirse, en cuanto al principio geométrico que rige su construcción, á uno ú otro de estos dos casos.

Busquemos ante todo el grado de precisión que es dable alcanzar en el cálculo de una distancia por observaciones telémétricas, en el caso de **a** constante y ω variable.

Un error $d.\omega$ cometido al medir el ángulo ω, produce un error $d.d$ en el de la distancia **d**, que tendrá por expresión:

$$d.d = \varepsilon = -\frac{a}{\omega^2}\, d\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Reflexionando en que el error en el ángulo puede ser en más ó menos, y sustituyendo en la ecuación (2) el valor de **a** obtenido de la (1), tendremos:

$$\varepsilon = \pm \frac{d}{\omega}\, d.\omega$$

El valor de $d\omega$ dependerá de los medios empleados para la colimación, y como en este caso se visa dos veces, el valor de $d\omega$ será:

$$d\omega = \pm \frac{180''}{M}$$

y

$$\epsilon = \pm \frac{180''}{M\omega} d \text{ ..... } (3)$$

Si, como es más exacto, en vez de M, se introduce la potencia de separación del visador empleado, se obtiene

$$\epsilon = \pm \frac{2E}{\omega} d \text{ ..... } (4)$$

Asignado el error máximo tolerable en una distancia dada, por medio de las anteriores fórmulas será fácil determinar la potencia que debe tener el visador que reduzca el error al límite fijado; ó viceversa, dada la potencia del visador y la base **a** podrá conocerse el error á una distancia cualquiera.

Supongamos por ejemplo, una base de 40 metros y por medir una línea de 4,000 metros; ω será $\frac{40}{4000}$ ó en segundos: 2062.″6. Si queremos no exceda el error de un centésimo de la distancia:

$$0.01\, d$$

resultará necesariamente:

$$M = 9$$

Con este aumento el ángulo podrá conocerse con una aproximación de

$$\frac{90''}{9} = 10''$$

Para un error máximo de $\frac{1}{100}$ el ángulo telemétrico C debe ser aproximado á 10″

En otra forma. Sea A B C el triángulo telemétrico (figura 130), $\mathbf{a} = 40^m$ y $AC = \mathbf{d} = 4.000^m$ como en el ejemplo anterior.

Entonces $\omega = 2062''6 = 0° — 34' — 22''6$.

Supongamos que el visador dé errores hasta de 1'. En este caso el punto C puede ocupar las posiciones extremas C' y C'' para las cuales

$$\text{ang. } C' = 0° — 35' — 22''6$$

y

$$\text{ang. } C'' = 0 — 33' — 22''6$$

Resolviendo los triángulos A B C' y A B C'' tendremos:

$$A\,C'' = 4121^m \qquad A\,C' = 3807^m$$

La desviación máxima total

$$C'C'' = 234$$

ó sea cosa de $\frac{1}{20}$ de la verdadera distancia.

Repitiendo el cálculo anterior; pero suponiendo de 10'' la diferencia entre ω y C' y entre ω y C'' se encontraría:

$$C'\,C'' = 40^m$$

confirmándose el resultado, como fácilmente se comprende tenía que suceder.

Un gran número de instrumentos, más ó menos ingeniosos, bautizados con el nombre de telémetros, examinados por el procedimiento indicado, resultan completamente indignos de confianza. Aquí es el caso de repetir el axioma de Plana *es preciso ver para medir* (*primo da misurare bisogna vedere*).

Los telémetros que satisfacen las condiciones para las que se intentan emplear son numerosos. Elegiremos de entre ellos el de Gautier, muy común en el Ejército francés, para describirlo en esta obra y dar idea de la construcción y manejo de uno de estos aparatos.

Son también bastante conocidos el telémetro Goulier, el Berdan, Roskiewicz, etc. El Goulier necesita el concurso de dos operadores y los dos últimos no son portátiles pues tienen como base, el de Berdan una barra de 6^m y el de Roskie-

wicz una de 1.^{m}50 y este además dos telescopios de retícula. (1)

Los telémetros hallan su principal y casi única aplicación en la Artillería, para el cálculo de la distancia del cañón al punto donde se desea hacer tocar el proyectil, punto inaccesible al observador para colocar en él una mira, etc., pero sí bastante determinado para servir de vértice C.

208. *Telémetro Gautier.*—(1) Sea A C (fig. 131) la distancia **d** que se quiere medir, AB la base **a** y ω el ángulo en C. Si el ángulo en B fuera recto, tendríamos:

$$d = \frac{a}{\text{sen } \omega}$$

Sea A D la perpendicular á CD; se tendrá exactamente:

$$d = \frac{\text{A D}}{\text{sen } \omega}$$

Pero

$$\text{A D} = a \cos \text{B A D}$$

Luego

$$d = \frac{a}{\text{sen } \omega} \cos \text{A B D}$$

Por ejemplo, para B A D = 8°, cos B A D = 0.9903, y si en este límite se toma para valor d la expresión:

$$\frac{a}{\text{sen } \omega}$$

el error cometido será sólo de $\frac{1}{100}$ de la distancia total y podrá despreciarse.

Si nos estacionamos en A con un instrumento que dé una

(1) Moessard P. Topographie et Geodésie. 1882, pág. 281.

(2) La lista siguiente comprende algunos otros telémetros:

El engímetro de Fallon (Austria).

El telémetro Adri & Son.

Id. íd. Tavernier Gravet.

Id. Id. Ceribatoni.

Oertel & Sohn de Münich, construyen un telémetro muy recomendado.

línea visual A M (fig. 132) tal que el ángulo M A C se aproxime mucho á un recto, y midiendo una base A B estacionamos en B, donde la línea de mira es B M′, tal que los ángulos M A C y M′ B C sean iguales, tendremos:

$$d = \frac{a}{\text{sen } M'BM}$$

con la condición, para que el error no pueda exceder de $\frac{1}{100}$ de **d**, que el ángulo ABC no difiera de un recto más de 8°.

Se deducirá, pues, la distancia de la medida del ángulo M B M′.

El ángulo C A M se determina por medio de dos pequeños espejos verticales **m** y **m′** (fig. 133), que forman entre sí un ángulo de 45°. Este ángulo puede hacerse variar hasta un límite tal que el ángulo C B A difiera siempre del recto menos de 8°.

Al ángulo M B M′ se mide por medio de un prisma de cristal P, de muy poca abertura (figs. 133 y 134), que puede girar alrededor del eje OO′ del instrumento. En este movimiento, el rayo directo O′ P desviado al pasar por el prisma, según P E, describe un cono de revolución, cuyo eje es OO′ y PH, PE, sus generatrices extremas.

Este ángulo máximum de desviación HPE, del rayo emergente, se obtiene por una semirevolución del prisma, y es tanto menor cuanto más agudo es el ángulo del prisma (véase 1ª parte de este volumen).

En el telémetro, este ángulo HPE, es igual á 3°, y en una media revolución, es decir, para una variación de posición de la circunferencia P′ (base del prisma) igual á 180°, el ángulo del rayo emergente con el rayo primitivo, toma todos los valores entre 0° y 3°. La medida de este ángulo muy pequeño, se encuentra pues sustituída por la de un ángulo mucho mayor, lo que permite más exactitud.

La figura 135 representa el instrumento, según un corte por su eje en las partes que interesa ver descubiertas. En **m**

y **m'** se ven los espejos á 45° de que hablamos arriba; el prisma está bajo el anillo P y un pequeño anteojo de Galileo **g** facilita más la operación de visar. Moviendo el tornillo V puede variarse un tanto la inclinación de los espejos. Al moverse la pieza que lleva el espejo **m**, arrastra consigo una pequeña escala que marca cuanto difiere de 45° el ángulo de los espejos.

El collar P, en el que está fijo el prisma de desviación, gira alrededor del eje del aparato para acusar el ángulo girado, y lleva una graduación que pasa frente á un índice: *infini.* (Véase también la figura esquemática 133).

Sea C A la línea por medir (fig. 136); se hace estación en A y se gira el collar P, de manera que la graduación *infini* coincida con el índice, y visando en la dirección A E, se trata de hacer coincidir la imagen doblemente reflejada del punto **C**, con una señal natural, árbol, arista de edificio, etc., bien visible y suficientemente alejada. Para ello se gira el tornillo V hasta que la visual encuentre un punto E que satisfaga á la condición de coincidencia.

Se mide en seguida una base A B sobre la prolongación de E A.

Después se estaciona en B y se visa nuevamente E hasta restablecer otra vez la coincidencia de las imágenes de C y de E, para lo cual se gira el collar P, pero no se toca el tornillo V. La graduación, marcada en P, es el ángulo en C y se multiplica por la longitud de la base A B para tener la distancia. Véase de nuevo la figura 132 y se comprenderá más claramente lo dicho antes sobre la medida del ángulo MBM' de dicha fignra.

Se puede también (fig. 137) del punto A visar C y, obrando sobre el tornillo V, traer á la coincidencia la imagen de una señal S situada á la derecha, medir A B sobre la prolongación de S A, y restablecer en B la coincidencia de C y de la imagen de S, haciendo girar el collar P.

Se emplea uno ú otro de estos dos métodos según el grado

de visibilidad relativa del objeto y de la señal. A causa de la pérdida de luz resultante de la doble reflexión, se visará directamente el punto menos iluminado.

Si no se encuentra una señal natural para mira, puede usarse una artificial, bandèra, estaca, etc.

Las coincidencias de las imágenes deben hacerse lo más perfectas posibles.

Estadias en general.

209. A fines del siglo XVII el doctor modenés Geminiano Montanari, propuso por primera vez el uso de un telescopio en cuyo campo estuvieran dispuestos hilos paralelos muy finos, para medir la distancia del telescopio á un estadal ó regla vertical graduada, deduciéndolas de la medida de la porción del estadal cuya imagen cae entre los hilos paralelos.

William Green, á quien es general atribuir la primacía de la idea, hizo proposición semejante á la de Montanari, en 1769 y posteriormente mejoró la estadia el célebre Reichembach.

Sea P el objetivo de un telescopio (fig. 138), Q R el ocular compuesto del mismo, L una regla graduada dispuesta perpendicularmente al eje óptico del anteojo y **m**, **n** los dos hilos paralelos, cuya distancia llamaremos z.

Afocados respectivamente: el objetivo á la distancia de la regla y el ocular para ver claramente los hilos, estos cortarán dos puntos M y N del estadal ó mejor dicho las imágenes de M y N caerán en el plano focal del objetivo sobre **m** y **n**. Si el estadal está dividido, de la diferencia de las lecturas en M y N se deducirá el intervalo M N que llamaremos Z.

Siendo O el centro óptico del objetivo, los rayos sin desviación M O m y N O n, con las líneas M N y m n, formarán dos triángulos semejantes que dan la relación ya encontrada en la Primera Parte de este libro:

$$\frac{Z}{z} = \frac{a}{a}$$

siendo **a** la distancia *del estadal al objetivo* y α la distancia del *objetivo á los hilos.*

De la fórmula anterior se deduce que la distancia:

$$a = \frac{\alpha}{z} Z \ldots\ldots (C)$$

Es evidente que cuando se conozcan las cantidades α y **z** ó su relación, del conocimiento del intervalo Z se llegará al de **a** por una simple multiplicación.

Puede simplificarse el cálculo de esta fórmula escogiendo como unidad de la graduación de la regla, la unidad misma de medida de longitud, el metro por ejemplo, dividida por la relación

$$\frac{\alpha}{z}$$

porque entonces:

$$a = Z;$$

esto es: que **a** expresado en unidades de medida de la distancia es igual al número de unidades del estadal comprendidas en el intervalo Z.

El triángulo M N O se llama *triángulo diastimométrico* y el ángulo en O *ángulo diastimométrico.* Designaremos el último con la letra δ. Vemos que, en la estadia, la base Z es inaccesible al observador colocado en el ángulo muy agudo opuesto á dicha base.

210. De las tres cantidades del segundo miembro de la ecuación (C), pueden hacerse constantes dos y una variable, obteniéndose así tres combinaciones que forman otras tantas clases de estadias:

I. α y z constantes; Z variable.

II. α y Z constantes; z variable.

III. Z y z constantes; α variable.

De la clase I es la estadia de hilos fijos para la cual se necesita emplear mira graduada que dé los valores variables de Z y, á igualdad de otras condiciones, da resultados más exactos que

las estadias de las otras dos clases, por razón de ser más grande Z, variable en la clase I, que z y α variables en las otras dos clases de estadias y en consecuencia un error en la medida de Z tendrá menor influencia en **a** que uno en la medida de las pequeñas longitudes α y z. Habrá, por lo tanto, que medir con mucha más precisión las líneas menores, si se intenta conseguir resultados tan exactos como observando la mayor. Adelante se aclarará esta indicación.

La clase de estadias II es la llamada de *estadias micrométricas*. En estas se requiere el empleo de un micrómetro para conocer el espacio recorrido por un hilo que pase de un punto á otro de la imagen de la mira, cuya separación constante Z sea conocida.

Las *alidadas autoreductrices* ofrecen un ejemplo de las estadias de la III clase y son de muy poco uso.

211. *Teoría de la Estadia de hilos fijos.*—Si suponemos la regla colocada á una distancia muy grande del objetivo, α es la *longitud focal principal* del objetivo y en ese caso la relación

$$\frac{\alpha}{z}$$

se hace una relación constante

$$\frac{p}{z}$$

que llamaremos C y la fórmula (C) será:

$$a = \mathrm{C}\,\mathrm{Z} \;\ldots\ldots\ldots\; (\mathrm{C}')$$

Pero como generalmente la distancia á la mira es pequeña para admitir el supuesto anterior de $\alpha = p$, resultará que en el segundo miembro de la ecuación (C) se encuentran dos variables: α y Z. Con los cambios de **a** varía la focal conjujada α.

El pequeño ángulo diastimométrico **m O n** que puede expresarse:

$$\delta = \frac{z}{a}$$

será también variable.

Si en la fórmula (C) sustituimos por a su valor

$$a = \frac{ap}{a - p}$$

como nos es dado en el párrafo 39, tendremos:

$$a = \frac{p}{1 - \frac{p}{a}} \frac{Z}{z},$$

de donde:

$$a = \frac{p}{z} \cdot Z + p$$

En esta fórmula,

$$\frac{p}{z}$$

sí es una relación constante, puesto que, para un sistema dado, la separación de los hilos z y la distancia focal principal p del objetivo son invariables.

Poniendo en vez de

$$\frac{p}{z}$$

la constante C, tendremos

$$a = C Z + p \text{ ..... (D)}$$

para la *distancia de la regla al objetivo.*

Si queremos la distancia al centro del instrumento debemos añadir la de este último punto al objetivo. Esta distancia comunmente es igual á

$$\frac{p}{2};$$

pero en general llamándola r tendremos en definitiva para *la distancia de la regla al centro de estación:*

$$a = C Z + p + r \text{ ..... } (E)$$

que es la llamada *ecuación de la estadia.*

En esta ecuación el ángulo diastimométrico es constante; tomando para dicho ángulo el valor

$$\frac{p}{z}.$$

Las dos constantes **p** y **r** sumadas pueden representarse por **g** y entonces

$$a = C Z + g. \quad (1)$$

212. Para conocer los valores de **a** en cualquier caso de observación debemos principiar por determinar los de C y g, lo cual puede hacerse por diferentes procedimientos, algunos de los cuales vamos á indicar.

Con una regla dividida en cuartos de milímetro se mide el intervalo **z** de los hilos y, de la manera explicada en la Primera parte, la distancia focal principal **p**. Conocidas estas dos dimensiones, se conoce su relación **C**.

La distancia **r** puede medirse disponiendo horizontalmente el anteojo; colocando una plomada en el objetivo y midiendo la distancia entre ella y la plomada central del instrumento que lleva el anteojo. Se deduce **g** = **p** + **r**.

Pueden determinarse **C** y **g** midiendo cuidadosamente, á partir del centro del instrumento, dos distancias **a** y **a'**, y en el término de cada una de ellas se coloca y observa el estadal, para conocer dos valores Z y Z'. Tendremos dos ecuaciones:

$$a = C Z + g$$
$$a' = C Z' + g$$

que combinadas por adición y sustracción dan:

$$C = \frac{a - a'}{Z - Z'}$$
$$g = \tfrac{1}{2}(a + a') - \tfrac{1}{2}(Z + Z') C.$$

(1) La adición de la constante **g** es la corrección llamada de Reichembach.

Es conveniente no limitarse á sólo las dos observaciones estrictamente necesarias para conocer las dos incógnitas, sino hacer varias medidas de distancias y formar una serie de ecuaciones

$$a = CZ + g$$
$$a' = CZ' + g$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = CZ_n + g$$

que combinadas por el método de Mayer ó por el de los mínimos cuadrados, dan los valores de **C** y **g**, con mayor exactitud que haciendo sólo dos observaciones.

Es ventajoso que **C** sea la unidad seguida de ceros para simplificar el cálculo de las distancias. Si, por ejemplo, **p** es de 0^m25, convendrá que la distancia de los hilos sea de 0^m0025, porque entonces: $C = 100$ y cada centímetro leído en la regla, representará un metro de distancia, á la que se añadirá fácilmente la cantidad **g** (1). Esta misma puede también añadirse mecánicamente haciendo una de las divisiones de la regla menos alta que las otras, la fracción de división que representa **g**. Entonces, siempre que la división corregida quede entre los hilos, si al hacer la lectura del número **n** de divisiones se cuenta como una entera la corregida, es evidente que habremos agregado **g** á la lectura. Esto se hizo para las brújulas nivelantes de la Escuela de Metz, pero tiene el inconveniente señalado en la nota que sigue.

Se puede también, como dijimos antes, variar la longitud de las divisiones de la regla para facilidad de cálculo. Si, por ejemplo, C es de 110, se toma en la regla un espacio de 110 centímetros que se divide en 100 partes iguales y es evidente que cada división corresponderá á un metro de distancia (2). En todo caso, puede disminuirse el trabajo reducien-

(1) Para los levantamientos al $\frac{1}{25000}$ y al $\frac{1}{50000}$ de la carta de Suiza se han usado instrumentos estadimétricos de Wild y se ha despreciado la corrección **g**, dada la pequeña escala.

(2) Esto tiene el inconveniente de que la mira no es ya útil para nivelaciones.

do á tabla con argumento: *lecturas de la mira*, para no multiplicar en cada caso por C el valor Z dado por la observación.

214. *Principio del analatismo.*—Busquemos ahora la interpretación óptica de la fórmula (D).

Entre los rayos luminosos que partiendo de **m** (fig. 139) van á M, hay uno que sale de **m** paralelamente al eje del objetivo y cuya marcha es: **m** T F M. Igualmente de **n** paralelamente al propio eje parte el rayo **n** S F N, y ambos se cortan en el *foco principal anterior* F del objetivo, por tratarse de convergencia de rayos paralelos.

Ahora bien, la distancia **a** (véase la figura) está formada de F R + F O = F R + **p** = **a** = C Z + **p**; luego F R es igual á C Z.

Así pues, **a**, en la fórmula C′, expresará la distancia de la mira al foco anterior del objetivo. Igual valor es el del término C Z en la ecuación (D).

El ángulo diastimométrico, considerado como el que tiene su vértice en F, será invariable, puesto que tiene por medida

$$\frac{z}{p}$$

en el triángulo S T F. Este punto F, *para el cual se mantiene la constancia del ángulo* δ, fué llamado por Porro punto *analático* (1) y *analatismo* la propiedad que lo distingue.

La necesidad de agregar la constante **g** á cada determinación de una distancia, es embarazosa y más aún, cuando, como adelante veremos, las visuales son inclinadas y ya **g** no es sino la proyección de su longitud sobre el horizonte, ó sea una variable con la inclinación de las visuales.

El ilustre Porro tuvo la ingeniosísima idea de modificar el sistema óptico del telescopio, para trasladar el punto analático á otro lugar más conveniente sobre el mismo eje óptico; y este lugar, para tener el punto invariable en la vertical del

(1) *α* negativo y *αλλαςςω* variación.

centro del instrumento, lo eligió en la intersección del eje del sistema óptico con el eje horizontal de rotación del telescopio y de la vertical de la estación.

Para alcanzar semejante resultado, base de uno de los mayores ó quizá del mayor progreso de los instrumentos topográficos, Porro añadió una lente convergente entre el objetivo y su plano focal, á la cual llamó *lente analática;* y *analatismo central* á la elegante modificación por él introducida.

Sea P (fig. 140) la lente objetiva del telescopio (1); Q la lente analática; **p** y **q** sus respectivas distancias focales principales; **d** la separación de las lentes; **a** la distancia de la mira al objetivo; **b** en general la distancia de la lente Q al punto en que la lente P forma la imagen de la mira; β la conjugada de **b** con respecto á la lente Q y Z y z las mismas dimensiones que en los párrafos anteriores.

Admitamos, que por construcción, $\mathbf{d} < \mathbf{p}$ y $\mathbf{q} < \mathbf{d}$.

Sabemos lo que sucede en un sistema como este: la lente P forma una imagen de la regla á la distancia de a, conjugada de **a** y esta imagen es el objeto radiante con respecto á la otra lente: Q. Las distancias β y **b** son las conjugadas respecto de la última lente y darán:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Las de la lente P nos dan

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(1) Hemos hablado hasta aquí de un objetivo formado de una sola lente acromatizada. Muchas veces se emplea un objetivo de dos lentes con el objeto de acortar el anteojo sin disminuir el aumento y conservando la conveniente claridad. Puede acortarse un telescopio hasta $\frac{1}{3}$ ó aun $\frac{2}{5}$ de su longitud, cuando el objetivo es simple, reemplazando este por dos idénticos, colocados uno tras de otro; pero entonces hay que emplear vidrios de calidad superior, porque los defectos del doble objetivo son la suma de los de los objetivos componentes. El principio del analatismo central que vamos á demostrar para el objetivo simple es igualmente cierto para el doble, que viene á ser, en último caso, comparable al simple de distancia focal equivalente á la del sistema objetivo compuesto de dos (véase 1ª parte de este libro y Goulier, op. cit., página 25).

Y, según hemos visto en el párrafo 50, las dimensiones del objeto Z y las de la imágen z, están ligadas en este sistema compuesto, por la ecuación:

$$z = \frac{a\,\beta}{a\,b}\,Z \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Si disponemos la lente Q de manera que su foco principal anterior coincida con f, foco conjugado de la regla respecto á la lente P, los rayos $f\,s\,m$, $f\,t\,n$ saldrán paralelos al eje del sistema óptico.

En la ecuación (1) pongamos en vez de **b**, su valor $d - a$, tendremos:

$$\frac{1}{d-a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{q\,(d-a)}{d-a-q}$$

De la ecuación (2) se deduce

$$a = \frac{a\,p}{a-p}$$

Sustituyendo en la (3) los valores para **b**, a y β, y reduciendo, se tiene:

$$z = \frac{p\,q}{d\,(a-p) - a\,p - q\,(a-p)}\,Z \;\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Como se ve en la figura, k es la distancia focal conjugada de $f\,u$ ó sea de $d - q$ y en consecuencia:

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{d-q} = \frac{1}{p} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

de donde

$$k = \frac{p\,(d-q)}{p+q-d} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

La distancia que deseamos conocer en las medias con estadia, es la antro-mira; llamándola A, es en general

$$A = a + k = a + \frac{p\,(d-q)}{p+q-d} = \frac{-d\,(a-p) + a\,p + q\,(a-p)}{p+q-d}$$

Combinando la ecuación (4) con esta última se tendrá:

$$A = -\frac{p\,q}{p+q-d}\,\frac{Z}{z} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

El signo negativo significa que la segunda imagen no sufre nueva inversión. Adoptando el signo positivo y haciendo:

$$z\,\frac{p\,q}{(p+q-d)}\,C_a$$

se tendrá para la *ecuación de la estadia analdtica central*

$$A = C_a\,Z \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

que expresará la *distancia de la mira al centro de analatismo.* Si se elige sobre el eje del movimiento vertical del anteojo, este punto será el de partida de las medidas que se contarán hasta la vertical del centro de estación.

La ecuación (5′) demuestra que la posición de f es constante, puesto que la conjugada k depende de cantidades invariables en un sistema dado de lentes y, además, que puede el constructor, mediante una elección oportuna de **p, d** y **q** hacer caer el centro de analatismo donde convenga.

La ecuación (7), en la cual C_a es una constante, demuestra por la relación entre A y Z, que el ángulo diastimométrico M δ N ó sea ω es invariable.

215. Dada la importancia del exacto conocimiento del analatismo, daremos otra demostración de esta ingeniosa reforma de los telescopios.

Supongamos dos rayos de luz M T, N S, que parten de la regla. Si no existiera la lente P se cortarían en δ; pero suponiendo que la lente se interpone á la distancia **a** de la mira, los rayos citados se refractarán convergiendo en f á la distancia α de la lente P.

Tomemos ahora otra lente convergente Q y coloquémosla de modo que su foco principal anterior caiga en f; entonces

los rayos Sft, Tfs, saldrán paralelos al eje del sistema óptico y en **m** y **n** se proyectarán las imágenes de M y N.

Ahora bien, el intervalo **m n**, ó **s t**, ó z, de los hilos, es invariable, así como lo es la distancia focal **q** ó sea lf; luego el triángulo sft será invariable.

En el triángulo $S T \delta$ tenemos, siendo ω el ángulo diastimométrico $M \delta N$,

$$S T = 2 k \tan \tfrac{1}{2} \omega$$

y en los triángulos semejantes $S Tf$, stf:

$$S T = (d - q) \frac{z}{q}$$

de donde:

$$2 k \tan \tfrac{1}{2} \omega = (d - q) \frac{z}{q} \text{ ..... } (8)$$

Pero como los puntos δ y f son conjugados respecto al objetivo P tendremos la ecuación (5) que ya vimos antes:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{d - q} = \frac{1}{k}$$

de la cual resulta que k es constante por serlo **d**, **p** y **q**; luego por la ecuación (8), ω será también constante por encerrar su valor sólo cantidades invariables k, **d**, **p**, **q** y z.

Haciendo coincidir con δ el centro del instrumento, y llamando A la distancia de dicho centro á la regla, se tendrá en el triángulo $M N \delta$:

$$Z = A\, 2 \tan \tfrac{1}{2} \omega$$

y haciendo

$$\frac{1}{2 \tan \frac{1}{2} \omega} = C_a \text{ ..... } (9)$$

obtendremos finalmente para ecuación de la estadia analítica

$$A = C_a Z$$

Esta cantidad Z se llama: *número generador.*

Si igualamos los dos valores obtenidos para C_a tendremos

$$2 \tan \tfrac{1}{2} \omega = \frac{p+q-d}{pq} z \text{ ..... } (10)$$

Siendo el ángulo ω muy pequeño pudiera el primer miembro considerarse igual á ω y determinarse su valor por la medida directa de **p**, **q**, **z** y **d**; pero más sencillo es determinar el de C_a por varias observaciones de distancias bien conocidas, como ya se explicó en el caso de la estadia común, y deducir de la ecuación (9) el valor de ω puesto que

$$\omega = \frac{Z}{A}$$

en el caso de un ángulo pequeño.

216. *Anteojos analáticos.*—Queda pues, repetimos, en manos del constructor la elección de **p**, **q** y **d**, para que el punto δ caiga donde le convenga y que ω tenga valores cómodos para el cálculo.

Es importante que la lente analática tenga la mayor longitud posible, porque de ese modo puede usarse una lente no aplanática, sin temor de deformar las imágenes dadas por el objetivo principal. En consecuencia la lente Q se colocará muy cerca del lugar donde se forma la imagen. Porro generalmente empleaba $d = 0.95\ p$, y como el eje de rotación por lo común está á la mitad de la longitud del telescopio, $k = 0.5\,p$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5) resulta proximamente

$$q = \tfrac{2}{3}\, p$$

Si fuera posible que $d = p$, sería el valor de q exactamente el de dos tercios de p; pero se comprende que no es posible la igualdad de **p** y **d** porque la lente analática resultaría en la placa misma de la retícula.

Otros constructores adoptan: $d = p - 25^{mm}$.

217. La separación de los hilos depende del valor que quiera darse al ángulo diastimométrico. Si el metro de distancia

está representado sobre la regla por 5^{mm} 10^{mm} 14^{mm} 20^{mm}..... el ángulo diastimométrico será: $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{14}{1000}$, $\frac{1}{50}$..... y los hilos deberán estar separados $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{100}$,..... de la distancia focal de la lente simple equivalente al sistema de lentes P y Q (1).

En lugar de calcular así la separación de los hilos, se determina generalmente por medio de otros procedimientos. Indicaremos dos que pueden aplicarse á los anteojos, sean ó no analáticos.

1º Fijo el anteojo y con la lente analática en su posición media, se coloca sobre el diafragma porta hilos un micrómetro de décimos de milímetro grabados sobre vidrio; se visan dos líneas negras de 6^{mm} de ancho trazadas en una regla á la distancia, una línea de otra, de 20 divisiones de la mira y colocada á 20^{m} del centro del analatismo; se estiman los milímetros y fracciones de milímetro comprendidas sobre la escala micrométrica, entre las dos líneas negras. Entonces se trazan sobre el diafragma rayas finas, que tengan la separación indicada por el micrómetro para formar el ángulo de $\frac{1}{100}$.

2º Se prepara, sobre un cartón, una representación del hilo vertical y los tres horizontales por colocar, haciendo la separación de los horizontales extremos igual á la porción del estadal que corresponde á la distancia del cartón al centro de analatismo. Se afoca el anteojo, haciendo que la imagen real del dibujo de los hilos corresponda al diafragma reticular. En seguida, quitado el ocular, con el auxilio de una lente de mano se fijan los hilos en correspondencia con las imágenes de los trazos del cartón.

218. Pero como es casi imposible al constructor fijar los hilos con la deseada separación (2), se corrige después el error

(1) Véase Primera Parte.

(2) Para e ltaquímetro francés de Brosset frères, descrito en la Cuarta Parte de este volumen, la separación de los hilos es de 3 milímetros; para obtener en las medidas la precisión que en las diastimométricas puede exigirse, no debe tolerarse sobre esta separación un error de $\frac{1}{1000}$ de milímetro! Esto hace com-

del ángulo diastimométrico, sea por medio de tornillos de rectificación que obran sobre piezas de metal que llevan los hilos independientemente uno de otro; sea, como lo ha hecho Porro, desalojando ligeramente la lente analática á lo largo del eje óptico, hasta conseguir que los hilos corten exactamente miras patrones colocadas á distancias convenientes.

Las figuras 141 y 142 representan el sistema para cambiar la distancia de los hilos adoptado por Keuffel & Esser. Fácilmente se comprende el mecanismo:

E E son dos brazos que giran alrededor de G y G, centros fijados á la placa de los hilos. Estos son cuatro: dos H H, horizontales y fijados á los brazos E E se usan para las lecturas de la regla graduada y los otros dos C y D forman el crucero que señala la línea de colimación y van adheridos á la placa porta-hilos. Los tornillos K K, reaccionados por el resorte J permiten variar la separación de los brazos y en consecuencia el ángulo diastimométrico. L L son dos tapones de tornillo, que se separan de sus lugares para mover los tornillos K K cuando se rectifican los hilos. Los B, B, B, B, sirven para rectificar la línea de colimación.

Es claro que, por este método de construcción, se rectifican independientemente, y sin alterar una á la otra, la línea de colimación y la distancia de los hilos.

Con el procedimiento Porro se varía **d** y en la ecuación (10) quedando constantes **z**, **p** y **q** el cambio de **d** modificará el valor de ω. Es cierto que el movimiento de la lente analática cambia la posición del centro de analatismo δ; pero si la variación de **d** no pasa de 4^{mm} á 5^{mm} el desalojamiento de δ es insignificante.

Hay otros medios de hacer variar el ángulo diastimométrico, pero sería extendernos demasiado el explicarlos. Al describir el taquímetro del Cuerpo de Ingenieros (Génie) francés insistiremos algo sobre esta cuestión.

prender que el empleo de dos hilos fijos es más conveniente que el de uno solo cuya posición varía, sean cuales fueren los órganos mecánicos que producen esa variación y la miden.

219. *Medida con la estadia de las distancias no horizontales.*— Debiendo conocerse por el topógrafo, no las distancias que separan á los puntos de diferente nivel, sino la distancia entre sus proyecciones sobre un plano horizontal, investiguemos la manera de obtener, en las medidas ópticas de que nos estamos ocupando, dicha proyección horizontal.

Sea O (fig. 143) el vértice del ángulo ω; O M y O N las rayas luminosas que van á pasar por los hilos del telescopio **m** y **n**; α el ángulo formado por la línea de colimación O G con la horizontal O O′ = A B′ y supongamos el centro del instrumento á una altura A O sobre el suelo, igual á la G B de manera que el ángulo α mida la inclinación del terreno.

Si en B se coloca la regla verticalmente, aparecerá cortado por los hilos un espacio M N = Z, mayor que el que debería leerse como interceptado, el cual, según lo dicho al exponer el principio de la estadia, es el M′ N′ correspondiente á la perpendicularidad entre la línea de colimación y la regla. Si esta última ocupara la posición exacta M′ N′, el espacio Z′ leído entre M′ y N′, multiplicado por la constante, nos daría la distancia O G y la proyección de O G sería:

$$O\,O' = A\,B' = O\,G \cos \alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

En los triángulos M G M′ y N G N′, admitiendo que los ángulos M′ y N′ sean rectos (puesto que su diferencia con un recto es solamente el pequeño ángulo $\frac{1}{2}\,\omega$), tendremos:

$$M'\,G = M\,G \cos \alpha \text{ y } N'\,G = N\,G \cos \alpha,$$

que sumadas dan:

$$M'\,N' = Z' = Z \cos \alpha$$

y como

$$O\,G = C_a\,Z' = C_a\,Z \cos \alpha$$

resultará, sustituyendo en la ecuación (a) este valor de O G y llamando H la distancia proyectada,

$$H = C_a\,Z \cos^2 \alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Notemos de paso que puede también conocerse el desnivel O′ G que será

$$O'G = V = BB' = C_a Z \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \ldots\ldots\ldots (c)$$

Si $\alpha = 0°$ la fórmula (b) da nuevamente la ya encontrada y la (c) muestra, lo que es evidente, que el desnivel es nulo.

La medida del ángulo vertical α, se efectúa de la manera que explicaremos en el Capítulo siguiente; pero baste decir que un eje horizontal de rotación, normal á la línea de colimación del telescopio, permite que este ejecute movimientos en un plano vertical y que un círculo graduado que arrastra consigo indica, al pasar frente á un índice fijo, el desalojamiento angular del anteojo, ó vice versa, un índice móvil señala sobre un círculo vertical fijo la cantidad angular recorrida por la línea de colimación.

220. Si no se trata de un anteojo analático, sino de uno común, las fórmulas se comprende serán:

$$H = C Z \cos^2 \alpha + g \cos \alpha$$
$$V = C Z \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + g \operatorname{sen} \alpha$$

Por simplificación en los casos prácticos podrá adoptarse:

$$H = (C Z + g) \cos^2 \alpha$$

y

$$V = (C Z + g) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha,$$

porque los errores dependientes de esta suposición, pueden considerarse de segundo orden, con respecto á los inevitables en este género de medidas.

Es conveniente dirigir las visuales á la regla de modo que el hilo central corte la división cuya altura sobre el terreno sea igual, con corta diferencia, á la del telescopio.

En el 2º volumen daremos los medios para calcular fácilmente las anteriores fórmulas y el modo mejor de disponer esos cálculos.

221. *Estadales para diastimómetros.*—No es indiferente el modo de trazar las divisiones sobre las reglas, su color, for-

ma, etc., para la observación con un anteojo; deben las líneas que las representan y las cifras que señalan los grupos de divisiones, estar hechos de la manera más apropiada para facilitar la visión é impedir equívocos. Líneas demasiado delgadas dejan de percibirse á corta distancia y demasiado gruesas evitan la apreciación exacta del lugar cortado por los hilos diastimométricos.

La experiencia ha venido demostrando las ventajas ó inconvenientes de los varios sistemas empleados. Describiremos los mejores, exponiendo, al hacerlo, dichas condiciones favorables ó desfavorables.

Al observar por el ocular de un telescopio diastimométrico del tipo más común, sea ó no analático, se presenta una imagen de la placa reticular como la dibujada en la figura 144, la cual señala, por la intersección del hilo vertical con el central **c**, la línea de colimación, por los **a** y **b** las cifras de la mira, que restadas dan el factor qne hemos llamado Z. Designando las cifras leídas en la regla con la letra del hilo respectivo tendremos $Z = a - b$, expresión de que algunas veces nos valdremos.

La figura 145 representa una parte de la regla usada generalmente con los anteojos no analáticos. Cada espacio negro ó blanco tiene un centímetro de altura y las cifras representan decímetros. La regla tiene comunmente 3^m50 de largo y 10 centímetros á 12 centímetros de ancho. Para distinguir más claramente los metros enteros, en el primero á partir del suelo, las líneas son negras, vermellón en el segundo, negras en el tercero, etc. Cuando el hilo no corta exactamente el termino de una división, el operador estima á ojo la fracción de división. Las cifras están invertidas para verlas rectas por el telescopio.

La figura 146 representa una mira vista por un telescopio y explica la lectura por los tres hilos. Es de graduación semejante á la de la anterior.

222. Con los instrumentos de Porro, perfeccionados por

Salmoiraghi, se emplean reglas que tienen la unidad de cuatro centímetros y, con el fin de obtener buenas lecturas á las diferentes distancias, la graduación se hace de diversos modos, como muestran las figuras 147, 148 y 149, las cuales corresponden respectivamente á la división fina, á la mediana y á la gruesa.

Todas son graduaciones equivalentes, porque la unidad es en todas de cuatro centímetros; pero en la primera está subdividida en diez partes, en la segunda en cinco y en la tercera en dos. En cada una el grueso de las rayas es de $\frac{2}{10}$ del intervalo que las separa. El hecho de la variabilidad de distancias del estadal, hace imposible el alcanzar, con sólo un modo de división, los límites dentro de los cuales es dado medir las distancias por medio de la estadia de hilos fijos, límites que fijaremos dentro de poco.

Ahora bien, esperiencias de los geodestas suizos Hirsch y Plantamour, demuestran que es posible estimar $\frac{1}{50}$ de un intervalo pequeño, valiéndose de un solo hilo, siempre que la potencia óptica del instrumento haga todavía sensible esta fracción. No aceptando para el caso de observaciones comunes de campo y hechas por observadores de habilidad media, pero cuidadosos, un tan alto grado de aproximación; ni aun el de $\frac{1}{40}$ dado por otros autores, sino el de $\frac{1}{20}$, convendrá que el intervalo entre dos rayas de la graduación no exceda de veinte veces la fracción que se pretende estimar, bien entendido, repetimos, que esta fracción no será nunca menor que la *límite de percepción óptica.*

Siendo variable este límite con la distancia, resultaría la necesidad, si quisiéramos siempre llegarnos hasta él, de tener reglas variables con la distancia, lo cual no siendo prácticamente realizable, se subsana en gran parte adoptando los tres tipos de graduación antes descritos, que se determinaron por medio de experiencias de Porro.

223. Cuando se emplean telescopios de oculares múltiples conviene contar con dos estadales; uno de cuatro me-

tros de largo, graduado en sus dos caras con las divisiones mediana y gruesa respectivamente, y el otro de dos metros de longitud graduado sólo en una cara con la división fina.

La estadia de la última clase, tiene, como ya se dijo, la unidad de cuatro centímetros, dividida en diez partes, y cada unidad está numerada (véase figura). Sirve hasta unos cien metros, y la estima de fracción de división, siendo por ejemplo, lo que es muy fácil, de un décimo de división, resulta apreciado el centésimo de la unidad de la regla, cuyo valor equivalente en distancia D, depende del ángulo diastimométrico.

Más allá de los 100^{m} la graduación fina no es legible hasta el límite antes dicho, y de los 100 á los 250^{m} conviene mejor el estadal de graduación mediana, pues el décimo de división apreciado en éste es más claramente apreciado que los dos décimos equivalentes de la graduación fina, que al aumentar la distancia se percibe mucho menos bien que la graduación mediana.

Como es evidente que los errores crecen con la distancia, no se pretende que por medio del artificio de variar el modo de graduación, se conserve igual error en las pequeñas como en las grandes distancias; lo que se busca es, que la relación entre un intervalo entero de la regla y el error en la estima de la posición del hilo no varíe.

Con el sistema de división de líneas (en vez de fajas de un centímetro alternativamente blancas y de color) se hace mejor la estimación de las fracciones, y la graduación es más perceptible para el ojo cuando consiste en rayas negras sobre fondo blanco que cuando consiste en fajas de igual anchura.

224. Convencidos de esta verdad los constructores de instrumentos, han ido abandonando el tipo de la figura 145 y adoptando el de rayas. En Francia el cuerpo de Ingenieros emplea miras del último tipo, consistentes en una regla de 3.^{m}08 de largo por 105^{mm} de ancho, que se dobla en dos por medio de una bisagra c. Cuando se quiere usar, se abre y

mantiene en posición por una barra colocada en la cara posterior, que puede girar en un eje (figura 150). La regla va provista de un nivel esférico **n** cuyo radio de curvatura es de 1^m y cuyo objeto es asegurar la verticalidad de la regla. Las divisiones son de color vermellón sobre fondo blanco, y tienen de grueso $\frac{2}{50}$ de la separación de eje á eje de cada raya, lo mismo que en las miras Porro, pues experiencias hechas en Francia han confirmado la bondad de dicha proporción.

El color de las rayas no es indiferente: sobre el vermellón ó el rojo claro los hilos reticulares destacan mejor que sobre el rojo obscuro ó el negro; pero en cambio con estos últimos es mayor el alcance visual ó legibilidad. Vimos que Salmoiraghi prefiere el negro y el cuerpo de Ingenieros el rojo. La forma y gruesos de los números inscritos en las miras no es tampoco indiferente. Tratándose en ellas de obtener el máximum de legibilidad, se trazan en negro sobre fondo blanco y, por indicaciones de la experiencia, los gruesos se hacen de un séptimo y los delgados de un catorceavo de la altura del número y las curvas poco cerradas. Cifras de 4^{cm} de altura son legibles á 260^m con un instrumento de: $M = 14$.

225. Si los números van escritos en su posición natural, por el telescopio se verán invertidos, y como esto puede dar lugar á confundir unos con otros (el 6 por ejemplo con el 9), se acostumbra, como se ve en la figura 151, escribir las cifras invertidas. Esto, sin embargo, tiene un inconveniente: viendo las cifras en posición natural, el observador instintivamente supone que también así está la mira, y por consiguiente que su pie está hacia abajo, mientras que en realidad queda hacia arriba.

Bourdaloue que ha ensayado miras de todas clases, ha encontrado tal frecuencia en errores debidos á la causa citada últimamente, que ha aconsejado la adopción de cifras acostadas como las de la figura 150. El operador habitualmente inclina la cabeza á la derecha, y por tanto convendrá inclinar las cifras á la izquierda para verlas por el anteojo caídas á la

derecha, del mismo lado que el operador se inclina, y así las lee en el orden creciente de izquierda á derecha, al cual estamos más acostumbrados por el sentido en que escribimos y leemos.

226. *Relación de perpendicularidad entre el estadal y la línea de colimación Eutímetro.*—En la ecuación de la estadia hemos partido del principio de que la línea de colimación es perpendicular á la regla cuando se trata de una visual horizontal, esto es: hemos establecido que la mira es perfectamente vertical, é igual hipótesis hemos admitido al dar la fórmula para medir las distancias inclinadas al horizonte.

Generalmente la verticalidad de la regla se establece por el hombre porta-mira, al tanteo, estimándose que las variaciones en más ó menos que se producen en la diferencia de lecturas (a—b), no son de bastante magnitud para que valga la pena de apreciarlas. Algunos operadores creen, sin embargo,

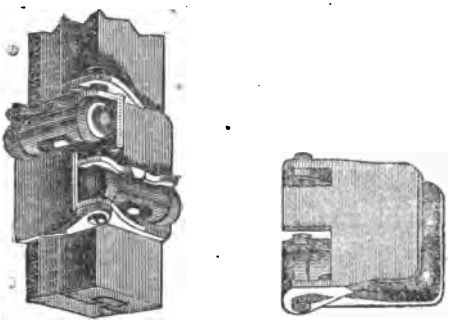


Fig. 152.

que es indispensable acercarse á la verticalidad más de lo permitido por la simple apreciación del porta-mira, y á fin de lograr ese propósito, se añade á la regla, ó bien un nivel (como se dijo al describir el estadal francés), cuya tangente central es perpendicular á la regla; ó bien una plomada que se coloca en la cara de la mira opuesta al anteojo, y que por consiguiente se presenta á la vista del porta-mira. La fig. 152 representa un pequeño aparato americano, bastante bueno, para disponer

verticalmente la regla. La figura se comprende desde luego. Los dos niveles perpendiculares se pueden colocar, cuando no se usan, en un solo plano, y tenerse así un pequeño bulto que en nada estorba.

Lo anterior se refiere á las desviaciones hacia adelante ó atrás, pero en el plano visual vertical; desviaciones que pasan desapercibidas para el observador, pues en cuanto á las laterales puede notarlas, porque se las acusa inmediatamente el hilo vertical de la retícula.

Wagner y Peaucellier han propuesto y construído miras que se colocan horizontalmente y perpendiculares al rayo visual del operador; pero en su aparato es preciso confiar la mira á persona ejercitada.

227. Igual disposición se ha realizado en el eutímetro, instrumento menos exacto que el anterior, pero que necesita un porta-mira menos apto. El eutímetro se compone de un marco rectangular MM′ (fig. 153), de una regla de báscula y de una tornapunta. El marco tiene 2^m20 de largo y lleva en el exterior de uno de sus lados mayores una graduación en medios decímetros. Una abrazadera de latón resbala á lo largo del marco, y se fija á la altura conveniente por medio de la presión de una excéntrica **e**, cuya extremidad se ve en la figura. Un perpendículo **f** indica la verticalidad del marco MM′. La regla SS se coloca normalmente al marco, esto es: horizontal, girando al rededor de un perno que lleva en su medio, hasta puntos de tope convenientemente dispuestos. Tiene además un movimiento que permite inclinarla de tal suerte, que su plano sea perpendicular á la visual.

Esto se comprueba por el porta-mira mirando por un colimador K y haciendo de manera que éste vise el anteojo diastimométrico. La altura de la regla horizontal sobre el suelo, debe ser, si es posible, la del anteojo medidor sobre el centro de estación; esta altura se lee para disponer la regla, sobre la graduación del marco. Parece excusado añadir que con las reglas horizontales se necesitan hilos verticales en el anteojo.

228. Sea cual fuere la clase de estadal empleado, es necesario mantenerlo inmóvil durante la observación; para conseguirlo, se apoya no sólo por su base en el suelo, sino además en un jalón inclinado que aumenta mucho su estabilidad y debe el operador anotar rápidamente, casi diríamos simultáneamente, las lecturas de los hilos, cosa que puede conseguir con alguna práctica, por lo menos si los hilos no pasan de tres. Si los hilos son en mayor número, como veremos adelante, debe procurarse la simultaneidad para los pares que forman cada ángulo ω.

En la última figura descrita vemos dispuesto un jalón ó tornapunta para afirmar el estadal, y fácil es imaginar artificios sencillos para apoyarlos; pues el uso de piezas complicadas ó de mucho peso ó volumen, quitaría al empleo de la estadia una de sus ventajas: la rapidez con la cual se disponen estaciones ó puntos en el terreno.

229. *Diversas clases de anteojos analáticos.*—Hasta aquí hemos examinado anteojos cuyo ángulo ω era único, es decir, anteojos con sólo dos hilos, pues á los centrales, vertical y horizontal, los hemos considerado como determinantes de la línea de colimación y nada más.

Pero debe observarse que si el hilo horizontal del centro está equidistante de los otros dos, da lugar á que consideremos tres ángulos: dos de $\frac{1}{2}\omega$ cada uno y el otro de ω.

Si el hilo ocupa la posición exacta asignada, la lectura que le corresponde en el estadal será precisamente el término medio de las lecturas **a** y **b**, sirviéndonos de rectificación de dichas lecturas el que se verifique la fórmula:

$$A = \frac{a+b}{2}$$

La regla se coloca en el punto que quiere determinarse de posición en el terreno, con tres objetos: 1º, fijar ó señalar el punto; 2º, servir para la determinación de la coordenada polar que llamamos ρ en el Capítulo I; y 3º, medir el desnivel

entre el punto de estación del observador y el de la regla, por la fórmula que dimos en este Capítulo.

Así ρ como la altura, deben medirse con la misma unidad; de consiguiente, la división de la regla debe ser tal, que su producto por ω resulte en unidades métricas, si los desniveles se expresan en metros, como es conveniente hacerlo. Las miras de constructores americanos ó ingleses, arregladas por pies y pulgadas, dan ρ y H en unidades de esta misma especie.

230. La necesidad de aumentar la precisión en la medida, sin salir de construcciones sencillas, ha sugerido á Salmoiraghi el modelo de telescopio representado en la fig. 154 á escala de $\frac{1}{2}$. En A se ve la lente analática, cercana al plano de los hilos y fijada invariablemente al tubo porta-objetivo, puesto que la distancia **d** entre esas lentes debe ser constante según demostramos. La retícula lleva seis hilos, uno de ellos vertical y horizontales los restantes (fig. 155).

El aumento, aunque de cerca de 30 veces, no impide se vean bien los hilos extremos por el empleo de un ocular ortoscópico.

La multiplicidad de los hilos tiene dos objetos: 1º, hacer depender el resultado de la media de dos determinaciones independientes, y 2º, tener dos ángulos diastimométricos, uno de ellos de abertura igual á $\frac{2}{5}$ de la del otro.

Los hilos del par **ab**, así como los del par **a′ b′**, comprenden entre sí un ángulo $\omega = 2062''6$ ó en partes del radio: 0.01 y los hilos centrales **a′ b** un ángulo $\omega = 825'' = 0.004$.

Siendo analático este anteojo, no hay que sumar la constante g; la distancia resulta inmediatamente de la lectura de la mira.

Designando por las letras de cada hilo la lectura hecha en la estadia por el dicho hilo, tendremos para los pares **ab, a′b′**:

$$A = a - b \qquad A = a' - b'$$

ó tomando el promedio

$$A = \frac{(a - b) + (a' - b')}{2}$$

estando **a**, **b**, **a'**, **b'**, multiplicados por la constante C_a, que en el caso siendo: $C_a = 100$, produce el efecto de tomar por metros de distancia los centímetros de diferencia en las lecturas.

Para el par **a'b**; $C_a = 250 = 2.5 \times 100$ y habrá que tomar los centímetros como metros y multiplicarlos por 2.50. Entonces:

$$A = 2.5\,(a' - b)$$

Con las miras de unidad de 0^m04, que ya describimos, se hace una simplificación en el cálculo: habrá que multiplicar cada una de las expresiones anteriores por 4, y quedarán en esta forma:

$$A = 2\left\{ (a - b) + (a' - b') \right\} \quad A = 10\,(a' - b)$$

Para verificar las lecturas, debe examinarse si muy próximamente:

$$a - b = a' - b'$$

Cuando quieren medirse grandes distancias, sin pretender demasiada exactitud, se usan los hilos centrales que dan tanta como las cintas ó cadenas de agrimensor. La observación limitada á esos hilos se presenta en el caso de distancias de más de 250^m, para las cuales la imagen de la mira es más corta que la separación de los hilos **a** y **b'**. Pudiera aún observarse con un par solo: **a b** ó **a' b'** hasta los 400^m.

En el caso último y con mira de unidad de 0^m04:

$$A = 4\,(a - b) = 4\,(a' - b')$$

Hilos dispuestos como acabamos de detallar y telescopios como el de la fig. 154, son usados en los taquímetros Salmoiraghi(1) y en los Cleps de modelo mediano y de modelo pequeño, construídos por este distinguido ingeniero.

(1) Véase Capítulo "Instrumentos topográficos universales."

231. Para el Cleps de modelo grande se usa el anteojo representado en la fig. 156, cuya parte ocular se ve en las figuras 57, 58 y 69. El objetivo tiene un diámetro de 52^{mm} y 450^{mm} de longitud focal. En A se ve la lente analática.

El tubo que lleva el diafragma de campo y los oculares, desliza en el tubo del objetivo, sin tocar al que lleva la lente analática. El ocular del tipo Argos es múltiplo y el aumento de cerca de 70 veces. (1)

Los hilos son diez y séis (fig. 157); quince horizontales y uno vertical, subdivididos en tres grupos simétricos con relación al centro del campo.

El primer grupo A constituído por los hilos 1, 2, 14 y 15;
El segundo grupo B „ „ „ „ 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12 y 13;
El tercer grupo C „ „ „ „ 7, 8 y 9.

Los hilos abajo del central los designamos con la letra **a** seguida de un índice, los de arriba con **b**, y su índice, y el hilo central con **c**.

En el grupo A, por ejemplo, leyendo los cuatro hilos, formaremos dos diferencias: $a_1 - b_{14}$ y $a'_2 - b'_{15}$ que teóricamente deben ser iguales. El valor del ángulo ω para estos pares ó su promedio en el caso general de que la igualdad completa no se verifique por la aproximación limitada de las lecturas, es de: $\omega = 4125''2$; ó bien $\omega = 0.02$.

Para el grupo B: $\omega = 2062''$ ó bien $\omega = 0.01$, y

Para el grupo C: $\omega = 825''$ ó bien $\omega = 0.004$.

El objeto de multiplicar los hilos en cada grupo, es alcanzar precisión mayor en la medida definitiva del intervalo de mira, haciéndolo depender de la media aritmética de un mayor número de medidas.

La fig. 158 representa, á escala natural y vista de frente, la parte ocular del telescopio. La pieza O lleva los oculares y puede desalojarse en el sentido indicado por la flecha **f** en la pieza T; ρ es una placa de metal con varios agujeros A, A',

(1) Aumentos mayores han sido abandonados.

B, B′ y C, que puede deslizar en la pieza O. Cuando esta última se halla en posición concéntrica sobre la pieza T, posición que llamaremos normal y que es la de la fig. 158, los tres oculares se hallan de frente á los grupos A y C; pero para evitar confusiones, la placa ρ no permite ver sino en el ocular central por el agujero C, y por consecuencia sólo son visibles los hilos del grupo C.

Para ver los del A (fig. 158′), es necesario desalojar la placa ρ, hasta llevar los taladros A, A′ en frente de los oculares correspondientes, con lo cual se cierra el taladro central C.

Para ver los hilos del grupo B (fig. 158″), se corre la placa á la izquierda y se baja toda la pieza O, la que viene á quedar en posición excéntrica respecto á la pieza T.

Con estos artificios se evitan confusiones entre los grupos de hilos, pues sólo se ven simultáneamente los de uno mismo, y (repetiremos lo que ya dijimos en la primera parte) se puede tener un gran campo sin disminuir la potencia del anteojo.

En teoría se obtiene un resultado equivalente al dado por el ocular Argos, llevando un solo ocular delante de cada hilo con el que se quiere hacer la lectura, por medio de un deslizamiento en un plano normal al eje del anteojo, como se usa en algunos instrumentos astronómicos. Hay instrumentos construídos de este modo, para lecturas de estadales; pero presentan el grave inconveniente de no tenerse con ellos seguridad de hacer lecturas verdaderamente *correspondientes*. Al poner la mano sobre el anteojo fijo, hay riesgo de desalojarlo, por poco que sea, y entonces se pierde la seguridad en las lecturas.

No puede probarse la inmobilidad, sino repitiendo las medidas; es decir, volviendo á ponerse en las mismas condiciones.

232. Suponiendo la visual central horizontal y la estadia vertical, la distancia del centro del instrumento á la mira tendrá las siguientes expresiones. (1)

(1) Reflexiónese en el valor de ω en cada caso y en que la unidad adoptada en la mira es de 0^m04.

Para el grupo A:

$$A = (a_1 - b_{14}) + (a'_2 - b'_{15})$$

Como verificación deberá tenerse muy próximamente

$$a_1 - b_{14} = a'_2 - b'_{15}$$

Para el grupo B:

$$A = (a_3 - b_{10}) + (a'_4 - b'_{11}) + (a''_5 - b''_{12}) + (a'''_6 - b'''_{13})$$

Como verificación próximamente serán

$$a_3 - b_{10} = a'_4 - b'_{11} = a''_5 - b''_{12} = a'''_6 - b'''_{13}$$

Y para el grupo C:

$$A = (a_7 - b_9)\ 10$$

Y siendo c la lectura del hilo central, como rectificación deberá obtenerse

$$a - c = c - b$$

Si en los grupos A y B se usara un solo par ó dos pares de hilos, habría que introducir el factor 2 ó 4 en la fórmula correspondiente. Cuando puede aceptarse menor precisión en los resultados, se simplifica el trabajo tomando un par, dos pares, etc., de hilos, y no todos como en las ocasiones que se desee la mayor exactitud.

233. Los anteojos de Moinot, los del Cuerpo de Ingenieros y los de los constructores ingleses y americanos, tienen sólo tres hilos horizontales. Los de las dos últimas procedencias no se construyen analáticos, ó por lo menos no he visto yo alguno que lo sea. En Alemania y Austria sí se usan y construyen con esa recomendable modificación.

234. *Precisión de las medidas con estadia de hilos fijos. Potencia de los anteojos considerados como órganos telemétricos.*—En la medida indirecta de las distancias, como en todas las demás,

se pueden cometer errores de dos clases: accidentales y sistemáticos. Llamaremos *equivocaciones* las incorrecciones provenidas de distracciones (tomar la cifra del decímetro anterior en el estadal por la del siguiente, saltar un centímetro, etc.) y analizaremos no sólo la frecuencia y valor de los errores propiamente dichos, sino también la de las equivocaciones, cuestión la última generalmente poco considerada en las discusiones.

La magnitud de los errores accidentales en las distancias deducidas de observaciones estadímétricas varía con los siguientes factores:

1º La altura de la parte de estadal Z correspondiente á cada metro de distancia, ó más propiamente: la relación entre esta parte de la estadia y un metro, ó bien la relación entre la separación z de los hilos y la distancia focal principal del sistema objetivo; relación que hemos visto expresa *el valor del ángulo* ω, siendo el radio igual á la unidad.

2º La potencia de separación del anteojo, potencia que ya vimos es diferente del aumento del mismo, y que sólo sería igual á él para el caso de anteojos sin defecto alguno.

3º La desviación de la regla de la vertical y sus oscilaciones.

4º Las proporciones, color y modo de agrupamiento de las divisiones de la regla y su iluminación.

5º La agudeza visual del observador y el mayor ó menor esmero puesto por él para afocar.

6º El grueso de los hilos diastimométricos.

Vamos á estudiar sucesivamente los diversos factores enumerados.

235. El triángulo diastimométrico tiene un ángulo constante ω muy pequeño, y una base Z pequeña en relación con la distancia A. Las líneas A y Z están ligadas por la relación

$$A = \frac{Z}{\omega} \cdots\cdots (a)$$

Si expresamos el valor de ω por su número de segundos, la fórmula anterior se hace

$$A = \frac{206.265}{\omega} Z \ldots\ldots (b)$$

La efectuación práctica de la medida se resuelve en la determinación exacta de Z, determinación dependiente del grado de precisión que se logre en la medida de ω; en otros términos: dependiente de la aptitud del anteojo para fijar las direcciones.

Llamemos ε el error que resulta en A, como consecuencia del error $d\,\omega$ cometido en ω. Tendremos, puesto que puede considerarse el pequeño valor ε como la diferencial de A con relación á ω:

$$\varepsilon = d\,A = \pm \frac{Z}{\omega^2} d\,\omega \ldots\ldots (c)$$

El valor $d\,\omega$ (en cuanto depende de la potencia del anteojo), siendo el error en la fijación ω, (es decir: de dos visuales por el anteojo, de las cuales cada una puede estar afectada por un error $\frac{90''}{M}$) en el caso más desfavorable de sumarse ambos errores será: $d\,\omega = \frac{180''}{M}$ y sustituyendo este valor en la ecuación (c):

$$\varepsilon = \pm \frac{Z}{\omega^2} \frac{180''}{M}$$

Pero por la ecuación (a) quedará la última:

$$\varepsilon = \pm \frac{180}{M\,\omega} A \ldots\ldots (d)$$

Esta ecuación dice que *el error es inversamente proporcional á la potencia del telescopio y á la magnitud del ángulo diastimométrico*, principios enunciados en los anteriores renglones como factores 1º y 2º influyentes en el error sobre la distancia.

236. Supongamos $\omega = 0.01 = 2062''\,6$ y $M = 20$; valores muy usuales.

En cuyo caso:

$$\epsilon = \pm \frac{180}{41252} = \pm 0.0043 \text{ A}$$

Un error de semejante cuantía, será inadmisible en la mayor parte de los casos prácticos. No basta, pues, poner hilos en el campo de un telescopio para poder aplicar, de una manera racional, los principios de la Celerimensura, midiendo la coordenada polar ρ de los puntos.

El telescopio del cuerpo de Ingenieros se construye con ángulo ω de $\frac{1}{50}$ y con valores de M de 12 y 14. El de Moinot tiene $\omega = \frac{1}{200}$ y M = 14.5. De estos datos resultará:

Para el de Ingenieros

de M = 12 y $\omega = \frac{1}{50}$..... $\epsilon = 0.0036$ A
„ M = 14 y $\omega = \frac{1}{50}$..... $\epsilon = 0.0031$ A

Para el de Moinot

de M = 14.5 y $\omega = \frac{1}{200}$..... $\epsilon = 0.0120$ A

El valor proporcionalmente alto de los errores sugiere la idea de aumentar M y ω; pero al hacer crecer M, como varias veces hemos dicho, se disminuye el campo y la claridad. Con un ocular Ramsdem común no puede pasarse de un aumento de 20 veces para leer sobre una mira dós hilos que comprendan un ángulo $\omega = 0.01$; de donde la necesidad de construir oculares especiales.

Pero aun con ellos no se puede pasar de M = 30, lo cual reduce el error á $\epsilon = 0.00286$ A, en vez del que hallamos primero ó sea á $0.^{m}286$ en 100 metros.

Podría emplearse un ángulo $\omega = \frac{1}{50}$; pero entonces sería necesario disminuir el aumento para tener un campo bastante extenso para poder leer los dos hilos sobre la mira. Sería preciso descender á M = 16 próximamente; lo que se gana por una parte se pierde por otra. (1)

(1) A. Salmoiraghi. Les Cleps. 1888.

237. Si en lugar de un solo par de hilos el telescopio tiene dos pares, como el de Salmoiraghi ya descrito y usado en los Cleps mediano y pequeño y en los taquímetros de verniers de dicho constructor, el valor de A se hace depender de la media de dos determinaciones, de manera que con esa disposición además de la ventaja ya indicada de tener, por la comparación de los dos números generadores, la prueba de no haber habido equivocaciones, el error ε tendrá por expresión: (1)

$$\varepsilon = \pm \frac{180}{M\,\omega} \frac{A}{\sqrt{2}}$$

En estos telescopios, Salmoiraghi ha conseguido, merced á su ocular especial (véase 1ª parte), un aumento de 28 veces y entonces para el error dependiente del telescopio, tendremos en este caso:

$$\varepsilon = \pm \frac{180\ A}{28 \times 2.062.6 \times \sqrt{2}} = \pm\ 0.0022.\ A$$

ó sean 0^m22 en 100 metros usándose los cuatro hilos.

Si sólo se leen los dos centrales para los cuales ya dijimos que $\omega = 825''$

$$\varepsilon = \pm\ 0.0072\ A.$$

238. Por el artificio del ocular Argos, es posible aumentar el campo conservando un gran aumento y tener tres combinaciones diversas de ángulos diastimométricos, como vimos poco há.

En el anteojo del Cleps grande $M = 70$; pero considerando que en ellos el diámetro del haz ocular y $' < 1^{mm}25$, (2) tendremos en el numerador, no ya dos veces $90''$ ó sean $180''$, sino dos veces $120''$ y entonces para el grupo A y $\omega = 4125''$

$$\varepsilon = \pm \frac{240}{4125'' \times 70 \times \sqrt{2}} A = \pm\ 0.00059\ A$$

(1) Véase Liagre, op. cit.
(2) Véase párrafo 97.

Para el grupo B de hilos, tratándose del promedio de cuatro lecturas y $\omega = 0.01 = 2062''$.

$$\varepsilon = \pm \frac{240}{2062 \times 70 \times \sqrt{4}} A = \pm 0.00082\ A$$

Y para el grupo C de un solo par y ángulo $\omega = 825''$

$$\varepsilon = \pm \frac{240}{825 \times 70} A = \pm 0.0041\ A$$

O lo que es lo mismo:

Con el grupo A un error probable de 0^m05 en 100^m;

Con el grupo B un error de 0^m08 en 100^m; y

Con el grupo C un error de 0^m41 en 100^m.

Dada la facilidad con que pueden hacerse tanto las observaciones de los hilos como los cálculos de las distancias, si quiere obtenerse mayor exactitud se repite la operación en otra parte de la regla, y entonces el promedio obtenido de los dos valores será más exacto; los errores se reducirán en proporción inversa de $\sqrt{2}$ y para el grupo A

$$\varepsilon = \pm 0.0004\ A;\ 0^m04 \text{ por } 100^m$$

y para el B

$$\varepsilon = \pm 0.00059\ A;\ 0^m06 \text{ por } 100^m$$

En cuanto depende la precisión de las medidas indirectas de las cualidades intrínsecas del anteojo, se puede pues, según lo comprueban los anteriores números, alcanzar un grado de precisión comparable al dado por longímetros, como la cadena, cinta, etc. Recuérdese al efecto lo dicho en el Capítulo anterior, y compárense aquellas cifras con las acabadas de obtener, para el caso de usar un Cleps grande en buenas condiciones.

239. Hemos supuesto en el estudio hecho de la influencia ejercida por los dos primeros factores, que diremos *telescópicos*, y admitido siempre para deducir las fórmulas de la estadia, que la mira se conserva perfectamente vertical. Examinemos

ahora la influencia de sus desviaciones hacia adelante ó hacia atrás de la posición vertical, pues las desviaciones laterales, además de tener un efecto prácticamente nulo, son fácilmente corregibles por la posición tipo, digamos así, del hilo vertical del telescopio.

Sea O el vértice del triángulo diastimométrico (fig. 159), BT la posición vertical que debe tener la mira y B'T la que realmente tiene por mala colocación de la misma, de tal modo que se desvía hacia atrás un ángulo δ. Sea α el ángulo que la línea de colimación forma con la horizontal, ω el ángulo diastimométrico; Z la lectura BC y Z' la B'C' hecha en la mira desviada. En el triángulo C'DB' se tiene:

$$C'B' = Z' = (C'E + ED)\,\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2} - \delta\right)} \ldots (n)$$

y en el triángulo CC'T será

$$CC' = m\,\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)} \ldots (o)$$

Siendo CC' = BE, el triángulo BED dará:

$$ED = \frac{m \operatorname{sen}\delta}{\cos\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}$$

De donde la ecuación (n) se hace, considerando que C'E = Z

$$Z' = Z\,\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2} - \delta\right)} + \frac{m \operatorname{sen}\delta}{\cos\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\omega}{2} - \delta\right)}$$

Si admitimos que el valor del ángulo ω es bastante peque-

ño con relación á α, para tomarlo como nulo, la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$Z' = Z \frac{\cos \alpha}{\cos (\alpha - \delta)}$$

de donde

$$Z' - Z = \varepsilon = Z' \left\{ 1 - \frac{\cos (\alpha - \delta)}{\cos \alpha} \right\}$$

Si la desviación de la mira es al contrario de como la representa la figura, se tomará δ negativo y si la inclinación de la visual es hacia abajo, será negativo α.

Para ver numéricamente el efecto de la desviación, formemos una tabla que dé los valores que debiera tener Z, según las desviaciones de 1°, 2° y 3° y con visuales inclinadas 5°, 10°, etc., siendo Z′ de 100 unidades.

α	$\delta = 1°$	$\delta = 2°$	$\delta = 3°$
5°	99.86	99.76	99.68
10°	99.71	99.44	99.23
15°	99.55	99.12	98.74
20°	99.39	98.80	98.24
30°	99.10	98.05	97.12
40°	98.55	97.13	95.75

Por el examen de la tabla se ve que la influencia de la desviación δ de la mira, de poca importancia relativamente cuando se observa cerca de la horizontal, crece rápidamente con la inclinación α de la línea de colimación. De aquí la conveniencia de observar con la mínima inclinación posible y la necesidad de cuidar más esmeradamente de la verticalidad de la mira, á medida que la citada inclinación aumenta.

Las oscilaciones que el porta-mira suele imprimir involuntariamente á la regla, producen también un error de magnitud variable é imposible de determinar; fácilmente se comprende que los desalojamientos de la mira hacen errónea la diferen-

cia de lecturas de los hilos, que aun cuando difiriendo en tiempo el menos posible, no son rigurosamente simultáneas.

240. Sobre la influencia de la disposición, forma, color, etc., de las divisiones de las miras, al hablar de ellas dimos ya los datos suficientes; réstanos sólo el agregar que la iluminación de la graduación la hace más ó menos legible, según la intensidad de aquella. Cuando el sol queda hacia atrás del observador y da de lleno en la regla, es más fácil leer las divisiones que en las circunstancias contrarias. La hora del día será, por la causa que venimos examinando, un factor en la exactitud de las observaciones, ó por lo menos en su rapidez.

241. La agudeza visual del observador y el esmero que emplee en sus operaciones, son como ya indicamos, otros factores dignos de considerarse en esta discusión. La relación de las agudezas visuales de dos observadores, igual á la de las precisiones de sus lecturas, se mide por la relación de las distancias á las cuales pueden alejarse de los mismos caracteres de imprenta, para que éstos lleguen al límite en que son legibles; con el ojo naturalmente acomodado á dichas distancias.

El cuidado del operador no se puede valorizar á priori, y supondremos siempre, al tratar de los errores, que se observa con el mayor esmero posible.

La precisión es mayor cuando el grueso de los hilos es el necesario para verlos netamente y no más. Los de araña dan mayor exactitud generalmente que los grabados en vidrio porque se ven más negros. En los anteojos italianos de cinco ó más hilos, sería operación punto menos que imposible el disponer los de araña en los lugares debidos, y en consecuencia se usan exclusivamente los grabados.

242. De todas las causas generadoras de los errores accidentales que hemos estudiado, las tres primeras son las más influyentes sobre la exactitud de los resultados.

Goulier ha discutido varios centenares de experiencias efectuadas observando con anteojos del modelo del Cuerpo de Ingenieros (Génie), de un aumento de doce veces, y de la dis-

cusión ha concluído que la media de los errores sobre las distancias A podía representarse en milímetros por la expresión empírica:

$$1^{mm} + \sqrt{700 + 0.6\ A^2}$$

Para una distancia de 100^m resulta el error con el anteojo del *Génie*, de 0^m10; lo cual daría para el de Moinot que vimos es unas tres veces mayor 0^m30 por 100, y para el de Salmoiraghi de aumento de 28 veces y ángulo $\omega = 0.01$ usado en los instrumentos medianos y pequeños, 0^m08 por 100, error menor que el deducido por el estudio teórico de la precisión, lo que se comprende, porque al hacerlo supusimos el error máximo cometido en cada hilo, de modo que se sumaran con todo su valor las desviaciones inevitables producidas por el límite de agudeza de la vista.

En estos experimentos, la verticalidad de la estadia se observaba cuidadosamente, y es de suponerse que se operó con especial esmero y por observadores ejercitados.

243. *Los errores sistemáticos* pueden provenir: (1)

1º De un defecto de rectificación en el nivel de la mira, de donde resultan errores de signo constante para las distancias leídas según inclinaciones ascendentes, pero de signo contrario para las correspondientes á visuales descendentes. La media de operaciones directas é inversas de un mismo lado, está libre de esta causa de error;

2º De una imperfección en el analatismo del telescopio, lo que hace que el centro del analatismo caiga adelante ó atrás del centro del instrumento;

3º De una inexactitud en el arreglo de los hilos, lo que aumenta ó disminuye proporcionalmente todas las distancias deducidas de las lecturas de la regla; y

4º De otras causas de poca importancia: irregularidad de las graduaciones, flexión y cambio de longitud de las miras,

(1) Goulier, op. cit. pág. 105.

variaciones de la separación de los hilos por la temperatura y humedad, etc.

De estas causas de error, la tercera es la que puede alcanzar más importancia; porque si se arregla la separación de los hilos, consiguiendo leer entre ellos el número de divisiones de la mira que corresponde á la distancia de la mira al instrumento, se lleva el riesgo de cometer, en más ó en menos, un error igual á la resultante de los errores accidentales en dos lecturas comunes.

Para observaciones consecutivas, en lugar de tender á compensarse, como pasa con los errores accidentales, el error sistemático de separación defectuosa de los hilos, da para todas las distancias errores del mismo signo y proporcionales á estas distancias.

Para disminuir, en la operación de verificación de la distancia de los hilos, las causas de errores accidentales, conviene disponer una mira con dos señales separadas la cantidad correspondiente á la longitud de la línea entre el centro de analatismo y dicha mira.

Esas señales consistirán en dos pares de fajas blancas sobre fondo negro; entre cada par de fajas el espacio debe ser el mínimo visible á la distancia de la observación.

244. A veces la segunda causa de error, *irregularidad del analatismo*, alcanza un valor considerable en los instrumentos de ciertos constructores que, por falta de instrucción teórica suficiente, no comprenden el papel de la lente analática.

Para investigar si el analatismo central es correcto, se arreglan los hilos como explicamos en este mismo Capítulo para una gran distancia, digamos 100 ó 150^{m}, y se examina en seguida si la lectura sobre el estadal da á distancias muy cortas (15 ó 20^{m}), el número generador correspondiente.

Esta condición es indispensable para que el analatismo se pueda considerar como correcto.

245. Experiencias de comparación hechas en Milan en 1875

entre distancias medidas con un anteojo analático del Cleps grande y con reglas de madera, dieron estos resultados:

Con la estadia..	25^m03	50^m05	100^m10	150^m12	200^m23
Con las reglas..	25 03	50 06	100 12	150 18	200 24

Las cifras dadas en el informe de una Comisión nombrada por el Ministerio de la Guerra francés y que estudió la cuestión que nos ocupa, son comparables á las anteriores en cuanto á que confirman la bondad de las mediciones hechas con la estadia analática de Porro.

En el Capítulo anterior, al hablar de la precisión de las medidas directas, dimos los valores de los errores que en ellas se cometen. El lector deberá hacer una comparación entre aquellas cifras y las dadas aquí, para formarse la convicción de que los medios ópticos de medida son susceptibles de proporcionar una exactitud suficiente para resolver muchos problemas topográficos y precisamente los que exigen el empleo de mucho tiempo, si se acude á las medidas directas de las líneas: los de poligonación.

246. Anticipándonos á dar datos que en el tomo 2º hallan su lugar adecuado; pero con el fin de poner á la vista números que expresen las exigencias de la práctica en cuanto á exactitud en la medida de las líneas de detalle, exponemos los *límites de tolerancia* establecidas por los Reglamentos catastrales de algunos países.

REGLAMENTO DEL DUCADO DE BADEN.

Longitud de la línea.	En terreno montañoso.	En llanura.
30^m	0^m50 %	0^m40 %
60^m	0^m40 %	0^m30 %
150^m	0^m25 %	0^m17 %
300^m	0^m20 %	0^m12 %

REGLAMENTO DE WÜRTEMBERG.

0^m15 % en terreno poco accidentado, donde en las medidas se hace rara vez uso de la plomada.

0^m21 % en terreno medianamente accidentado, donde en las medidas se hace frecuente uso de la plomada.

0^m27 % en terreno muy accidentado (1).

Reglamento Prusiano.

Tolerancia: $a = 0.01 \sqrt{4\,L + 0.005\,L^2}$ en terreno favorable.

$a = 0.01 \sqrt{6\,L + 0.0075\,L^2}$ en terreno mediano.

$a = 0.01 \sqrt{8\,L + 0.01\,L^2}$ en terreno desfavorable.

Reglamento de Baviera. (2)

0.20 % en terreno poco accidentado en que rara vez se usa plomada.

0.26 % en terreno mediano donde se usa frecuentemente la plomada.

0.32 % en terreno desfavorable donde se usa constantemente la plomada y se procede por escalones.

Reglamento Suizo (3).

Longitud de la línea.	Tolerancia en llanura.	Tolerancia en montaña.
3^m á 30^m	3 á 9 cents.	9 á 27 cents.
30^m á 60^m	12 „	36 „
60^m á 90^m	15 „	45 „
90^m á 120^m	18 „	54 „

Las tolerancias citadas se refieren á la doble medida directa.

El Reglamento del catastro de Módena, para la doble determinación de un lado con estadia, concede la tolerancia de 0^m20 % para ligamientos directos, ó sea cuando de un extremo de la longitud, se lee la estadia colocada en el otro extremo, y la de 0^m30 % para ligamientos indirectos ó sea cuando se usa de una estación intermedia.

247. *Equivocaciones.*—Las lecturas hechas sobre una mira vertical, de ordinario expresan el número de divisiones com-

(1) Cavani, Geometria Applicata pág. 241.
(2) Instrucciones sobre la medición catastral de Baviera (1885).
(3) F. Brönniman, Die Kataster Vermessung etc., Berna, 1888.

prendido entre el pie de la mira y el hilo con que se hace la lectura. El número generador resulta de la diferencia de las lecturas y puede estar equivocado por dos motivos: ó bien por defecto en las lecturas, ó porque la substracción de éstas sea incorrecta.

Al describir las miras hicimos ver las precauciones tomadas por los constructores para graduarlas y numerarlas con el doble fin de conseguir la mayor visibilidad y evitar las equivocaciones de lectura.

Éstas y las de substracción se evitan totalmente ó poco menos, por la comparación hecha en el campo mismo entre los números generadores obtenidos de las diversas combinaciones de pares de hilos. El hilo central debe siempre leerse, no siguiendo nunca la práctica viciosa de conformarse con las lecturas de los hilos diastimométricos, pues el pequeño aumento de tiempo que esa lectura requiere, se compensa de sobra con la verificación que proporciona.

Desde luego leyendo, supongamos en un anteojo con sólo tres hilos, sólo dos, hay el riesgo de tomar uno de los diastimométricos y el central, en vez de los dos hilos extremos, equivocaciones que se evita leyendo siempre los tres.

Acabadas de hacer en el libro de campo del Ingeniero las tres anotaciones, debe examinar si la del hilo central es el promedio de las de los laterales, ó al menos no difiere de este valor en una cantidad mayor que la justa tolerancia. Las operaciones de cálculo se facilitan haciendo que el hilo más bajo corte una división de decímetros enteros. Tratándose de una nivelación, esto no siempre será posible; pero de serlo, conviene hacerlo en obvio de tiempo empleado en restas.

En los anteojos con varios pares de hilos, las equivocaciones son menos de temer por la fácil comparación entre varios grupos independientes; esta es una gran ventaja de la multiplicidad de lecturas.

248. *Teoría de la estadia de hilo móvil ó estadia micrométrica.* —Si en el triángulo diastimométrico tomamos como constan-

tes la separación Z de dos puntos de la mira, ó sea la base del triángulo, y admitimos que la línea de colimación de un telescopio sea perpendicular al medio de Z, el triángulo diastimométrico será isósceles y bastará medir el ángulo ω para conocer el lado del triángulo que expresa la distancia del punto de observación á la mira.

El ángulo ω siendo muy pequeño, deberá medirse con una gran precisión para no afectar las distancias deducidas de su valor, de un gran error, proporcionalmente á dichas distancias.

Los anteojos que forman parte de un instrumento topográfico, van sostenidos en su parte media por un eje horizontal que descansa sobre dos apoyos, y es perpendicular á la línea de colimación; esto hace que el movimiento de rotación del eje sobre sí mismo, produzca un movimiento de la línea de colimación en un plano vertical.

Si en el telescopio se dispone un hilo central horizontal y visamos una señal A (fig. 160), de modo que sea cortada por el hilo, y luego, moviendo el telescopio, hacemos que el mismo hilo corte la señal B dispuesta en el mismo estadal y separada de la primera una distancia conocida A B = Z, podremos calcular la distancia A O midiendo en un círculo vertical el ángulo A O B = ω = N O N′ de desalojamiento de un índice N sobre un círculo cuyo centro es el de rotación del telescopio.

Si suponemos que A B sea de un metro, tamaño muy cómodo en la práctica, y O A de 100 metros, el ángulo ω será de 2062.″65 ó sean 34′ 22.″6. Si en el círculo graduado es posible apreciar un minuto, como es habitual en los instrumentos topográficos más comunes, un error en el ángulo, igual al límite de aproximación del círculo vertical, producirá un error de 3^m en la distancia. De aquí la necesidad de hacer la medida del ángulo ω por medios más delicados, pues hay que notar que, además del error en la medida del ángulo provenido de la aproximación del órgano con que se mide, tene-

mos el del límite de apreciación visual que cometemos en cualesquiera observaciones ópticas.

Son numerosos los artificios mecánicos ideados para la medida de pequeños ángulos, pero las comprenderemos en dos clases principales: 1ª, la de aquellos que requieren el desalojamiento del anteojo que lleva un hilo fijo; y 2ª la de aquellos que requieren el desalojamiento de un hilo dejando inmóvil el anteojo.

En unos y otros el órgano medidor consiste en un *tornillo* llamado *micrométrico*, cuya punta está destinada á recorrer pequeñas longitudes que se valúan por el número de vueltas y fracciones de vuelta del tornillo, sabiéndose previamente la pequeña y constante medida del paso.

249. El *Gradienter* (1), que podríamos llamar en castellano *micrómetro de pendientes*, es un instrumento perteneciente á la 1ª clase de las en que hemos dividido los medidores de pequeños ángulos. Es muy usado en los Estados Unidos, y raro es el ingeniero americano que no lo prefiere á la estadia; la mayor parte de los constructores de ese país, por no decir que todos, adaptan á sus teodolitos este instrumento, cuyo costo esdeunos $ 5, oro. El Profesor Stampfer, de Viena, es el autor de este útil y sencillo accesorio, que consiste en un tornillo que obra sobre el extremo inferior de un brazo que á voluntad se fija ó deja libre en el eje horizontal que soporta un anteojo. La extremidad superior del brazo tiene un agujero circular para dejar pasar el eje citado, y un tornillo cuya punta se aplica al eje lo hace solidario del brazo cuando se quiere que éste se mueva arrastrando á aquel (fig. 161). Un fuerte resorte espiral directamente opuesto al tornillo, oprime el brazo contra la punta del tornillo micrométrico. Éste se fabrica con el mayor esmero y tiene una cabeza bastante ancha, graduada sobre plata en cien ó cincuenta partes iguales. Nuestra figura representa el Gradienter de Gurley, y en la 89 y otras va-

(1) En inglés: *grade*, pendiente. *Gradient*, lo que se mueve por grados ó pasos.

rias del Capítulo XII, en menor escala, el modelo de Buff & Berger. Una escala lateral está graduada de modo que una revolución del tornillo corresponde á una división de la es-

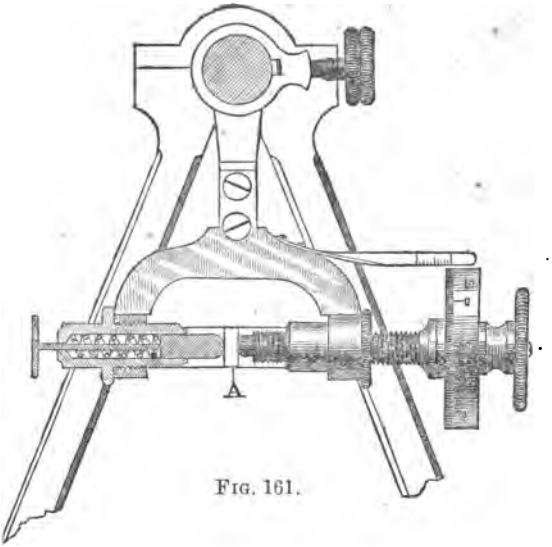


Fig. 161.

cala. Así pues, se leen sobre ésta las revoluciones enteras, y sobre la graduación de la cabeza las fracciones de revolución.

El tornillo Gurley tiene un paso tal, que cuando se completa una revolución, el hilo horizontal del telescopio recorre el espacio de un metro sobre una mira colocada á 100 metros, lo que da para valor del ángulo recorrido por la línea de colimación 2062.″6. El tornillo Buff y Berger hace desalojar el hilo 0^m50 sobre una mira á 100 metros; el ángulo es de 1031.″3.

Por consecuencia, cada una de las 100 divisiones del tornillo valdrá en el Gurley 20.″63, y cada una de las 50 del Buff y Berger igualmente valdrá 20.″63; pero podrá apreciarse aún, digamos el tercio de división en el primero, ó sean 6.″88, y, por ser más grandes, el quinto de división en el segundo, ó sean 4.″14.

250. Siendo el ángulo ω de valor conocido por la lectura de las divisiones del Gradienter, en la fórmula:

$$\delta = \frac{Z}{\omega}$$

en la cual δ es la distancia buscada, Z una constante conocida y ω el ángulo medido, conoceremos δ simplemente por una división. Supongamos que en nuestro instrumento el paso del tornillo equivalga á 2062.″2, y que nuestra base sea de 100 centímetros. Una revolución equivale á $\omega = \frac{1}{100}$, luego, si producimos n revoluciones, el ángulo ω será de $\frac{n}{100}$, y la distancia tendrá por expresión, en función de la lectura del Gradienter:

$$\delta = \frac{Z}{n} . 100 \text{ ..... } (p)$$

Dirigido el anteojo de modo que el hilo corte uno de los extremos de la longitud de 100 centímetros, anotamos la lectura del Gradienter; digamos, dos revoluciones y 36 divisiones, ó sean 2.36; fijamos el brazo del Gradienter contra el eje de rotación del telescopio, y giramos el tornillo micrométrico hasta que el hilo horizontal corte el otro extremo de la longitud Z anotando la lectura que, supongamos, fué de 3.28. La diferencia $3.28 - 2.36 = 0.92 = n$ expresa el número de revoluciones que hubo que girar el tornillo para recorrer el ángulo ω, cuyo valor es en nuestro caso $\frac{0.92}{100}$.

Entonces δ será igual á $\frac{1}{0.92} . 100 = 108^{m}69$.

Como otro ejemplo supongamos:

Lecturas	3.22
	1.14
Diferencia:	$2.08 = n$

Luego $\delta = \frac{1}{2.08} . 100 = 47^{m}6$.

En general la cifra 100 se divide entre la diferencia de lecturas. La operación es bien sencilla, y se hace aún más, poniendo el micrómetro en la división 0 al empezar la opera-

ción, para evitar una resta. Puede formarse una tabla de división en división entre los valores usuales, por ejemplo entre los 30ᵐ y los 400ᵐ ó 500ᵐ.

251. No es indispensable que la mira sea de un metro; hemos escogido este valor como sencillo y el más usual; pero Z puede tener otro cualquiera, con tal que sea conocido, para introducirlo en la fórmula.

Por esta razón una mira ordinaria graduada en centímetros, puede servir con el gradienter; pero se usa con mayor comodidad la representada en la figura 162, por ser más fácilmente visibles las líneas de separación de los colores de los dos discos (mitad carmín y mitad blancos), que las divisiones de las reglas, en las que podría haber equivocación, imposible usando la mira de discos.

Una de éstas puede construirse con poquísimo costo; pero debe cuidarse que la distancia entre las líneas que se visan y son los diámetros horizontales de los discos, sea exactamente la Z adoptada, y que dichos diámetros sean horizontales cuando la regla se disponga vertical. La altura de la regla debe ser de unos 3 metros y el disco más alto se dispone cerca de la punta más elevada.

Si se prefiere usar una mira común, porque á la vez que se aplique al Gradienter sirva para nivelaciones, para leer con hilos estadimétricos, etc., puede seguirse, ó bien el método ya expuesto, visando una base de un metro, ó bien el siguiente: se pone el Gradienter en cero y se visa una división de la regla haciéndose una lectura a; en seguida se gira el micrómetro una revolución exactamente y se anota la nueva lectura b; la diferencia $a - b = Z$, y el valor augular de una revolución del tornillo son cantidades conocidas y se deduce desde luego $\delta = \frac{Z}{\omega}$

Ya dijimos que ω es generalmente de $\frac{1}{50}$ ó de $\frac{1}{100}$; el cálculo es muy sencillo é idéntico al detallado al hablar de la estadia de hilos fijos.

Para alcanzar mayor precisión pueden anotarse las lecturas sobre la mira, de revolución en revolución, tanto como lo permita la longitud de la imagen de aquella ó el campo del instrumento.

La rapidez de las observaciones con el Gradienter permite repetirlas sin gran pérdida de tiempo, tomando en la graduación puntos de partida diferentes.

Es condición indispensable, puesto que sobre ella se basa la resolución del triángulo diastimométrico, que la mira se tenga vertical cuando la visual es horizontal, ó dicho con más generalidad, que la línea visual al medio del espacio Z sea normal á la regla.

Sería repetir las explicaciones dadas sobre este punto, el detallar las disposiciones adoptadas para obtener la verticalidad de la mira, ya que esto es más fácil que obtener la perpendicularidad cuando se inclina la línea de colimación.

252. *Medida con el Gradienter de las distancias inclinadas.*— Si la observación se ha hecho por el segundo procedimiento de los explicados, cae la resolución del caso de medidas inclinadas dentro del de la estadia de hilos fijos. La lectura $(a - b)$ sobre la mira vertical, corresponde á la $(a - b)$ cos. α sobre una mira supuesta normal á la visual, y esta última cifra será la que se divida por la ω correspondiente á las n revoluciones verificadas para pasar el hilo de a á b. La distancia resultante será la oblicua del instrumento á la mira, y las proyecciones horizontal y vertical de esa distancia tendrán por expresión:

$$H = \frac{(a - b) \cos \alpha}{\omega} \cdot \cos \alpha \qquad V = \frac{(a - b) \cos \alpha}{\omega} \operatorname{sen} \alpha$$

En el caso de observar una mira de base $(a - b)$ fija, la corrección debida á la inclinación α de la visual debe hacerse de otra manera (1).

(1) No he encontrado en las obras americanas que he consultado, la solución general de este caso. Me permito proponer la que doy en el texto, que me parece bastante sencilla y suficientemente aproximada dada la precisión del Gradienter.

Sea O (fig. 163) el centro del instrumento, A B la mira en la que los dos puntos de referencia M y N están separados una distancia invariable Z.

Sea α el ángulo de altura S O R, y ω el ángulo P O N. La distancia buscada O S $= \delta$ puede considerarse prácticamente igual á O S′ y dada la pequeñez de ω podemos seguir admitiendo que la tangente ω es igual al arco. Por N llevemos la línea P N normal á la de colimación O S′ é igual á M N = Z.

La línea invariable M N será vista bajo un ángulo M O N menor que el ángulo P O N bajo el cual se observaría si se llenara la condición necesaria de perpendicularidad. Habrá, pues que corregir el ángulo observado, añadiéndole el P O M, puesto que

$$PON = \omega = POM' + MON = POM' + \omega'$$
$$POM' = \omega - \omega'$$

Para determinar los valores de ω y ω' sea h la altura vertical subtendida por una revolución del micrómetro á la distancia δ (suponiendo horizontal la línea de colimación); entonces tendremos para valor angular de una revolución del tornillo:

$$\frac{h}{\delta}$$

y si para que el hilo pase de N á P se necesitan n revoluciones, el valor del ángulo será

$$\omega = \frac{nh}{\delta}$$

Igualmente, si para pasar el hilo de N á M′, ó lo que es lo mismo de N á M, hay que efectuar n' revoluciones:

$$\omega' = \frac{n'h}{\delta}$$

y entonces

$$POM' = \frac{h}{\delta}(n - n') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (r)$$

En el triángulo M N M′ podemos considerar el ángulo en

N como igual á a, del cual difiere solamente la pequeña cantidad S O S′ = $\frac{1}{2}$ P O M y tendremos:

$$M' N = Z \cos a$$

luego

$$P M' = P N - M' N = Z - Z \cos a = Z (1 - \cos a)$$

En el triángulo P O M′ el ángulo muy pequeño P O M′ se puede expresar:

$$P O M' = \frac{P M'}{O M'} = \frac{Z (1 - \cos a)}{\delta} \text{ ..... } (s)$$

en cuya fórmula suponemos (lo cual no produce error sensible) que O M′ es equivalente á la distancia inclinada δ = O S (1)

Igualando los dos valores de P O M′ (r) y (s) se tendrá:

$$h (n - n') = Z (1 - \cos a);$$

de donde:

$$n = n' + \frac{Z}{h} (1 - \cos a).$$

253. Hemos supuesto que l es igual á 1, pero para más generalidad dejemos el valor l en la fórmula.

Si notamos que también

$$Z = n h$$

y sustituimos esta expresión en la fórmula anterior, tendremos:

$$n = n' + n - n \cos a$$

y por último la lectura corregida será:

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}'}{\cos a}.$$

La fórmula general (p) de la distancia:

$$\delta = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{n}} . 100$$

será, por la sustitución de n:

$$\delta = \frac{\mathrm{Z} \cos a}{\mathrm{n}'} . 100$$

(1) Aun para un ángulo a de 30°, á la distancia de 100^{m} el error resultante, admitiendo este supuesto, es de $\frac{1}{100000}$ de P O M′.

En cuya expresión entra la lectura conocida n′ hecha sobre la mira vertical.

Ejemplo:

Supongamos $\alpha = 8°$, y las lecturas sobre la mira de 1^m, 0,17 y 1.20.

Tendremos $n' = 103$; $\cos \alpha = 0.990$, de donde

$$\delta = \frac{99}{1.03} = 96^m1$$

para la distancia inclinada del centro del instrumento al medio de la mira.

Las proyecciones horizontal y vertical de δ serán:

$$H = \frac{Z \cos^2 \alpha}{n'} . 100; \qquad V = \frac{Z \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{n'} . 100$$

y en nuestro ejemplo:

$$H = 95^m1; \qquad V = 13^m45$$

254. *Micrómetro de corredera.*—En lugar de producir el desalojamiento de todo el telescopio, puede este permanecer fijo y moverse el hilo horizontal girando un tornillo paralelamente á sí mismo para pasar de un punto á otro de la imagen real de la mira observada. Para producir ese efecto se han ideado mecanismos consistentes, en resumen, en un pequeño bastidor que lleva el hilo y que corre, como consecuencia del movimiento giratorio que el observador imprime á un tornillo micrométrico de cabeza graduada, en un plano normal á la línea de colimación.

El tornillo transforma el movimiento circular de una graduación bastante grande como lo es la de la cabeza del tornillo, en un movimiento rectilíneo pequeñísimo del bastidor; de aquí la posibilidad de medir con bastante precisión los espacios recorridos por el hilo.

En el gradienter vimos el caso de un tornillo que se desaloja arrastrando el brazo conectado con el anteojo; puede disponerse el tornillo de modo que no avance, sino que haga

adelantar ó retroceder un pequeño bastidor ó corredera. Esta última disposición (fig. 164), es la adoptada generalmente en el micrómetro de hilo móvil usado en los telescopios.

La figura citada representa un tornillo cuya cabeza T dividida en 100 partes, señala, por la división que cae frente al índice V, la parte que giró el tornillo. Un bastidor **be** lleva dos ranuras para el desalojamiento de la pieza **m** producido por el tornillo que entra sin poder avanzar ni retroceder en una rosca **m'** de la pieza móvil.

Otra disposición es la que se ve en la fig. 165. El tambor graduado T se mueve avanzando ó retrocediendo cuando se gira la cabeza B del micrómetro y obra sobre una pieza que corre entre las guías **a** y **b**, en el punto **d**.

En el opuesto **d'** apoya un resorte, encerrado en el tubo *l*, que impide el *tiempo muerto* ó sea la detención del movimiento de la pieza **dd'** producida al cambiar el sentido de la rotación como en el caso de la fig. 164, porque en el presente el resorte hace que la hélice del tornillo siempre apoye por el mismo lado en la rosca correspondiente, y se evita el mal de tener inmóvil el hilo, no obstante que se gire el tambor, mientras se recorre el espacio que forzosamente se deja como juego entre la hélice del tornillo y la rosca donde ésta se aloja.

La adición del resorte se hace también á los micrómetros del primer tipo, y se usa la disposición de la figura 166. En ésta el tornillo no puede avanzar; el bastidor resbala y el resorte evita el tiempo muerto.

255. Se comprende desde luego, dada la uniformidad de la hélice que constituye la rosca del tornillo, que los desalojamientos rectilíneos de su punta, serán proporcionales á los arcos recorridos por el cero de la graduación de la cabeza, arcos acusados por un indice fijo. En consecuencia, si llamamos **p** el paso del tornillo ó sea la separación uniforme de las roscas ó sea al avance por revolución; si se gira un número **n** de vueltas enteras y fracciones de vuelta, tendremos la fórmula:

$$x = ns$$

en la cual **x** representa el desalojamiento del hilo correspondiente á **n** revoluciones.

Esta proposición subsiste rigurosamente, si la hélice es rigurosamente uniforme. En la práctica se alcanza la uniformidad hasta el límite de $\frac{1}{200}$ del paso, pero no debe contarse con más de $\frac{1}{100}$, de manera que en rigor

$$x = ns \pm 0.01\ s.$$

La cantidad **x** expresará unidades angulares ó lineales según las que **s** exprese. Para determinar el valor del paso del tornillo se dirige el anteojo á una mira vertical, haciendo coincidir el hilo con un punto de dicha mira, digamos cero. En seguida, sin tocar el anteojo y sólo valiéndose del movimiento del micrómetro, se lleva el hilo hasta otro punto de la señal, leyéndose las nuevas indicaciones de la mira y del micrómetro.

256. Sea Z la diferencia de lecturas en la mira, **n** la de lecturas en el micrómetro y **p** la distancia focal principal del objetivo.

Si el anteojo no es analático tendremos, siendo A la distancia cuidadosamente medida *de la regla* graduada *al foco anterior* del objetivo (1) y z el espacio recorrido por el hilo al mover el micrómetro **n** vueltas:

$$\frac{Z}{A} = \omega = \frac{z}{p}$$

de donde:

$$z = p\frac{Z}{A} \ldots\ldots (1)$$

En esta ecuación se conoce por medida directa Z y **a** y ya hemos explicado en la primera parte cómo se determina **p**; en consecuencia se determinará fácilmente **z** y luego **s** en virtud de la relación

$$x = ns = z$$

de la cual resulta:

$$\frac{z}{n} = s$$

(1) Véase lo dicho al hablar de la ecuación de la estadia de hilos fijos.

Conviene determinar **p** por varias experiencias á diversas distancias, y una vez conocido un valor medio, será muy fácil determinar la distancia del centro del instrumento á la mira, de la manera siguiente:

Se practica la observación de dos discos como los que representamos en la fig. 162, cuya distancia es de 1^m, anotando la lectura correspondiente á cada disco y deduciendo **n**.

En la fórmula de la estadia no analática:

$$A = CZ + g \ldots\ldots (1')$$

Z es una constante y C es la variable, puesto que el ángulo diastimométrico cambia y es:

$$C = \frac{1}{\omega} = \frac{p}{z} = \frac{p}{ns} \ldots\ldots (2_m)$$

que sustituído en la fórmula..... (1′) da:

$$A = \frac{Zp}{s} \cdot \frac{1}{n} + g$$

Llamando C_m la constante $\frac{Zp}{s}$, la *ecuación de la estadia micrométrica*, será

$$A = \frac{C_m}{n} + g \ldots\ldots (3_m)$$

en la cual A es la distancia de la mira al centro de estación, **n** la lectura del micrómetro y C_m, g las constantes que conocemos.

257. En vez de determinar **s** por la medida de **p**, **z** y **a** como explicamos, se pueden determinar simultáneamente C_m y g por un método análogo al expuesto al tratar de la estadia de hilos fijos.

De paso advertiremos que también se construyen micrómetros con dos hilos: uno fijo que se hace coincidir con el cero de la señal y corresponde al origen de la graduación del tornillo, y otro móvil que se lleva á la otra extremidad de la señal. Esto facilita notablemente la operación.

Las revoluciones enteras se cuentan por los dientes de una sierrita visible por el ocular á la vez que los hilos y cuya se-

paración es igual al paso del tornillo, y por tanto el hilo móvil pasa del ángulo de un diente al ángulo del siguiente, cada vez que el tornillo avanza un paso; las fracciones de revolución se leen al exterior.

La necesidad de un aparato especial y de cierta delicadeza y complicación, ha limitado bastante el empleo de esta clase de micrómetros en los instrumentos topográficos. Mucho más sencillo es el gradienter entre los de su propia clase y más aún el sistema de estadia de hilos fijos. Sin embargo, no faltan buenos constructores que fabriquen los anteojos con micrómetros de hilos móviles; entre ellos podemos citar á Salleron, de Paris, quien fabrica una alidada provista del aparato que nos ocupa.

258. *Precisión de las medidas con estadias de hilo móvil.*—Incurriríamos en muchas repeticiones si diéramos el detalle completo de los errores, así sistemáticos como accidentales, que se pueden cometer observando con anteojos provistos de estadias micrométricas; por lo tanto nos limitaremos á estudiar solamente los errores que son propios de éstas y no de las estadias de hilos fijos, y creemos que el lector fácilmente hará aplicación de las reglas que ya conoce al nuevo caso que hoy examinamos.

Así, por ejemplo, el error de coincidencia del hilo con la línea visada en la regla, y que es dependiente de la agudez de la vista, es de valor igual al que se comete en la estadia de hilos fijos. El estudio ya hecho de esa cuestión, el de la verticalidad de la mira, el de la aptitud del observador, etc., pueden generalizarse al caso que nos ocupa.

En este se tiene, visando una mira como la representada en la fig. 162, una mayor facilidad para establecer claramente la sobreposición del hilo y la línea que divide los colores de los discos, que para leer la división cortada por el hilo en la mira graduada.

Pueden observarse distancias mayores que con la estadia de hilos fijos que están limitadas en su empleo por el tamaño

de la mira, cuya imagen llega á ser más pequeña que la separación de los hilos, para un valor dado de la distancia.

259. Es muy importante el notar que en la estadia micrométrica, si bien pueden apreciarse las grandes distancias, como expresamos en el párrafo anterior, los errores no son, como en la de hilos fijos, directamente proporcionales á las distancias. En efecto, el intervalo variable de los hilos, es tanto más pequeño cuanto mayor es la distancia y un error de cierta magnitud (que admitiremos es la mínima por el cuidado del observador y buen funcionamiento del micrómetro), en la estimación del intervalo de los hilos, tendrá una importancia proporcionalmente mayor á medida que estén menos separados, es decir, á medida que la distancia crezca.

Un error ε en la medida del intervalo de los hilos, observando á 100^m por ejemplo, y que sea de $\frac{1}{100}$ de dicho intervalo, producirá un error E en la distancia. Si esta es de 200^m y el error conserva su propio valor ε, como la separación de los hilos se hizo de la mitad, su influencia proporcional será doble y E será 2E á 100^m y 4E á los 200^m; en general será el error en la distancia proporcional al cuadrado de dicha distancia. Esto se demuestra también diferenciando la expresión de la distancia (1) que da:

$$d\,A = E = -\frac{Zp}{z^2}\,.\,dz = -\frac{Zp}{z^2}\,\varepsilon = \frac{A^2}{Zp}\,.\,\varepsilon$$

en la que d A es el error en la distancia, resultante del error dz en la medida del intervalo de los hilos. Vemos que E es directamente proporcional al cuadrado de la distancia é inversamente proporcional al tamaño de la mira. Conviene aumentar ésta, pero no puede pasarse de un límite cuando más de 2^m. Generalmente se adopta $Z = 1^m$.

260. Es evidente que por bien hecho que esté el tornillo, tendrá pequeñísimas irregularidades de valor absoluto insignificante, pero que ejercen influencia por ser de magnitud apreciable en relación con la pequeña cantidad z. Es además indispensable dejar un cierto *juego* entre la rosca y la tuerca,

cuyo efecto es producir una detención del movimiento de traslación cuando cambia de sentido el giratorio; se disminuye considerablemente este defecto por el resorte antagonista del micrómetro que obliga á la hélice á apoyar siempre por el mismo lado. En resumen, por perfecto que sea el arreglo cinemático del aparato, es menos estable que el de hilos fijos. He aquí una de las razones por las que no es dable alcanzar en las medidas micrométricas *topográficas*, la exactitud que antes dijimos podía obtenerse con las estadias en que z es invariable.

Debe observarse por otra parte que la diferencia de dos lecturas sucesivas, por un mismo hilo, está expuesta á un error, á veces muy considerable, debido á la falta de absoluta fijeza tanto de la mira como del instrumento mismo, cuando transcurre, como necesariamente sucede, un intervalo relativamente grande de tiempo, de una á otra observación. En la estadia de hilos fijos las observaciones son, puede decirse, simultáneas y además el observador no tiene que tocar el anteojo para pasar de la una á la otra, y no tiene por consecuencia que temer desalojamientos debidos á ese contacto.

No conozco experiencias comparativas entre las estadias de hilos fijos y las de hilo móvil; sería muy interesante ejecutarlas y designar la resultante de todos los errores cometidos con las de la última clase, para formar un criterio positivo del mérito de estos instrumentos.

261. *Estadias de doble imagen.—Anteojo micrométrico de Lugeol.—Micrómetro de Rochon.—Estadia prismática de Richards.* —Se han ideado numerosos diastimómetros fundados en la posibilidad de conocer el ángulo diastimométrico por la medida del desalojamiento angular que sufre una imagen de una mira con relación á otra imagen inmóvil de la misma. Por lo tanto siempre se tiene un aparato óptico capaz de producir una doble imagen y un aparato medidor del desalojamiento relativo de las imágenes producidas.

Poco nos extenderemos al hablar de estos instrumentos que son menos usados que los antes descritos.

262. *Anteojo micrométrico de Lugeol.*—Sabido es que cuando un objetivo está dividido por un diámetro en dos partes perfectamente ajustadas, la imagen de un objeto observado se presenta única y como si el cristal fuese de una pieza; pero si se hace mover uno de los semicírculos ó ambos, corriendo á lo largo del diámetro de división, se ven dos imágenes del objeto, cuya separación es proporcional á la distancia recorrida por los medios-objetivos y á la distancia á que se halla el objeto del punto de estación.

Tomemos una regla graduada en centímetros y dotada de una tablilla blanca con una raya negra en su medio y bastante ancha, para percibirse por medio del anteojo hasta la distancia máxima del empleo del mismo. La línea negra se hace corresponder á una lectura conocida de la regla.

Colocada la regla á 100^m, por ejemplo, del instrumento, se mueve uno de los semiobjetivos por un mecanismo dispuesto al efecto, hasta que la segunda imagen de la raya negra se pinte á medio metro de distancia del punto de la regla en que se halla la raya. Haciendo igual operación, en sentido opuesto con el otro medio objetivo, las dos imágenes se pintarán á un metro de distancia una de otra y el ángulo de las visuales á las rayas será de $\frac{1}{100}$. Si el mecanismo que desaloja los medios objetivos está arreglado de tal suerte que al movimiento antes efectuado corresponde la indicación de un desalojamiento, por ejemplo de 0^m03, y éste es producido por la rotación de un tornillo graduado, de tal manera que se aprecien fracciones bastante pequeñas de ese desalojamiento, tendremos los medios para deducir de la separación medida y tamaño constante de la mira la distancia al punto de observación. La fórmula es semejante á la del gradienter, y puede usarse la mira que para éste describimos; puede también ser variable Z y conociéndose la separación de los semiobjetivos y la focal

principal se podrá usar de la fórmula de la estadia micrométrica de hilo móvil.

263. *Micrómetro de Rochon.* (1)—Este instrumento se funda en las leyes de la doble refracción.

Se sabe que el cuarzo ó cristal de roca, el espato calizo y otras muchas substancias cristalinas, tienen la propiedad de dividir en dos el rayo luminoso que las atraviesa en ciertas direcciones, de manera que si al través de un prisma formado de alguna de esas materias se observa un objeto cualquiera, se verán en general dos imágenes suyas, la una en la posición que le señalan las leyes de la refracción ordinaria, y la otra más ó menos desviada de la primera. Esta última se dice que es la extraordinaria, ó bien la imagen formada por la refracción extraordinaria. En los cristales de substancias bi-refringentes existen siempre una ó dos direcciones, llamadas ejes, en las cuales no se desvía la luz, sino que sin dividirse sigue las leyes comunes de la refracción.

Supongamos ahora que un prisma bi-refringente se coloque en el interior de un telescopio entre el ocular y el objetivo, y que se dirija á una señal cualquiera. Al través del ocular veremos dos imágenes de la señal, más ó menos separadas entre sí, y como al atravesar el prisma los rayos ordinarios y extraordinarios forman un ángulo constante, resultará que la distancia de una imagen á la otra aumentará cuando se acerque el prisma al objetivo; que por el contrario, será menor al acercarlo al ocular; y que si se hace coincidir con el foco mismo del telescopio el punto del prisma en que se dividen los rayos luminosos no veremos más que una imagen del objeto.

264. Según esto, desde la superposición que tiene lugar cuando el prisma está en el foco del objetivo, hasta su mayor separación que se verifica cerca de esta lente, la distancia de las imágenes ordinaria y extraordinaria irá creciendo gradualmente, y se comprende sin esfuerzo que si la señal que se ob-

(1) Díaz Covarrubias, op. cit. pág. 289.

serva tiene tales dimensiones que sus dos imágenes lleguen á verse enteramente separadas, habrá en el tubo del telescopio un punto en que si se coloca el prisma bi-refringente se verán en simple contacto. La distancia de ese punto al foco depende de la magnitud de la señal; pero sea esta cual fuere, es evidente que entonces la separación de los centros de ambas imágenes es precisamente igual á la magnitud de cualquiera de ellas, y que si pudiera medirse, daría una cantidad equivalente á la que hemos designado por z, puesto que representa el tamaño de la imagen del objeto visado Z, y que puede compararse á la que se obtendría entre los hilos paralelos.

265. Más bien que la pequeña distancia z, lo que importa conocer es la relación: $\frac{1}{\omega} = \frac{p}{z}$ que entra en las diversas fórmulas que se han desarrollado (2_m), relación que es la cotangente del ángulo ω.

En la figura 167, P es el objetivo, B el prisma bi-refringente, por lo general de cuarzo. Este prisma, cuya sección es un rectángulo, está compuesto de otros dos *a c b*, *a d b*, de sección triangular: la cara *b c* del primero es perpendicular al eje del cristal, quiere decir á la dirección en que no se dividen los rayos luminosos; mientras que la cara *a d* del segundo está cortada paralelamente al mismo eje, y por consiguiente produce la doble imagen. El primero de estos prismas no tiene más objeto que acromatizar al segundo, no ejerciendo acción alguna sobre la dirección de la luz; y como además los rayos luminosos que vienen de la señal, después de pasar por el objetivo, atraviesan el prisma compuesto perpendicularmente á sus caras *b c* y *a d*, resulta que en el foco se formará la imagen ordinaria *m n* de la señal. Los mismos rayos al llegar á la cara *a b* de unión de los dos prismas componentes, hiriéndola oblicuamente, sufren la refracción extraordinaria, y se desvían de su dirección primitiva, tanto al atravesar el segundo prisma *a b d*, como al salir de él, de suerte que irán á formar en el mismo foco la imagen extraordinaria *m m'*. En

la figura se ha supuesto que se hallan en contacto ambas imágenes; pero se concibe fácilmente que siendo constantes las direcciones con que salen del prisma los rayos ordinarios y extraordinarios, si se supone que éste se mueve paralelamente á sí mismo á lo largo del eje del telescopio, el contacto no subsistirá, y que las dos imágenes se sobrepondrán si se acerca el prisma al ocular, y quedarán separadas si se acerca al objetivo. Prolongando las líneas que señalan la dirección de los rayos extraordinarios, se encontrarán en o y o', y podremos suponer que en estos puntos tiene lugar la separación de unos y otros, siendo el ángulo $n\ o\ m$ igual á $m\ o'\ m'$. De aquí se deduce que si movemos el prisma hasta que o y o' coincidan respectivamente con n y m, se verán las imágenes sobrepuestas al través del ocular, ó lo que es lo mismo, se verá una sola imagen, y el prisma se hallará en el foco del telescopio.

Considerándolo ahora en la posición que indica la figura, quiere decir, á una distancia tal del ocular que las imágenes aparezcan en contacto, determinemos el valor de $\frac{p}{z}$ ó de la cotangente del ángulo visual ω. Llamando θ el ángulo $n\ o\ m = m\ o'\ m'$ de los rayos, que es constante para un mismo prisma, y x la distancia $m\ o'$, tendremos en el triángulo rectángulo $m\ o'\ m'$, en el cual

$$m\,m' = z$$

representa la magnitud de la imagen:

$$z = x \tan \theta$$

y como por otra parte tenemos

$$z = p \tan \omega$$

encontraremos eliminando á z

$$\cot \omega = \frac{p \cot \theta}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(R)}$$

El producto $p \cot \theta$ es constante para cada instrumento, por lo cual el resultado anterior indica que la cotangente del

ángulo visual (1) es inversamente proporcional á la distancia x del prisma al foco.

266. Este principio es el que sirve de fundamento á la construcción del micrómetro de doble imagen. El telescopio tiene una ranura á lo largo del tubo, en la cual se mueve la pieza que contiene el prisma bi-refringente, y que sirve para llevarlo á diversas distancias del foco. En la parte exterior hay una graduación á lo largo de la ranura. Veamos cómo está hecha dicha graduación.

Siendo constante el producto p cot θ, puede determinarse experimentalmente observando una señal de dimensiones conocidas, colocada á una gran distancia del objetivo y moviendo el prisma hasta que las dos imágenes se confundan en una sola.

Entonces el prisma estará en el foco del telescopio y en la ranura se señalará el punto *cero*. Se observa en seguida la misma señal cuyo tamaño Z dijimos es conocido y la que se halla colocada á una distancia bien medida A′ del objetivo. Tendremos para el ángulo diastimométrico correspondiente:

$$\tan \omega' = \frac{Z}{A' - p}$$

valor que sustituído en la ecuación (R) produce:

$$p \cot \theta = \frac{x' (A' - p)}{Z}$$

Queda así determinado el término $p \cot \theta$ que entra en la ecuación general (R). Se marca en el tubo el punto correspondiente á la distancia A′ y los más que se quiera, haciendo variar A′ para conocer varios valores de **x**. Se inscriben también los varios valores correspondientes de $\cot \omega$.

Puesto que el micrómetro Rochon da la medida del ángulo ω, su fórmula será de la forma de la general

$$A = CZ + g$$

siempre que C sea igual á $\cot \omega$.

(1) El que nosotros llamamos diastimométrico.

Si se adopta Z de un metro, el valor de la cotangente del ángulo ω da desde luego la distancia, pues los contactos de las imágenes no son tan perfectos que se puedan apreciar las fracciones de metro, como lo es **g**.

La mira conveniente es la que representamos en la fig. 162 ó una dispuesta como la de la fig. 168.

267. La comisión mexicana que trazó los límites entre México y los Estados Unidos, usó micrómetros de Rochon para configurar el curso del Río Bravo del Norte, apoyándose en puntos trigonométricos.

268. *La estadia prismática del profesor americano Richards* consiste en un anteojo y un prisma de pequeño ángulo que cubre la mitad del objetivo del anteojo. De esta disposición resulta que el observador verá dos imágenes de la señal: la normal que pasó por el objetivo solamente, y una desviada que será la que se refractó á través del prisma. El ángulo de éste siendo constante, la desviación será constante, y observando una mira graduada podrá deducirse de la lectura de sus divisiones la distancia *de la mira al prisma* (vértice del ángulo de desviación), conocido que sea por experiencias previas el valor del dicho ángulo (fig. 169).

Bajo este aspecto la estadia Richards entra en la clase I, de Z variable; pero no es así como se usa, sino que el observador por un mecanismo apropiado trae las dos imágenes á la sobreposición y por la medida del desalojamiento producido, tanto menor cuanto menor es la distancia, conoce la separación de la mira al prisma á la que añade la del prisma al centro de estación.

Así usada corresponde esta ingeniosa estadia á las de la segunda clase, en que dividimos los diastimómetros. (1)

269. *Alidada auto-reductriz.*—En este instrumento las direcciones se fijan á la simple vista, y en consecuencia las medidas están lejos de alcanzar el grado de precisión que se obtiene

(1) Véase para detalles el opúsculo del inventor, Profesor del Institute of Technology.—Massachusetts.

con el auxilio de los teleseopios. Lo describiremos sin embargo, como tipo de las estadias de la tercera clase: aquellas en que Z y z son constantes y α variable.

Consiste la alidada (figs. 170 y 171) en una regla horizontal de cobre, con la que se liga un nivel de burbuja encerrado en un tubo cilíndrico de metal y que lleva dos pínulas verticales; la ocular provista de tres agujeros A, B y C y la objetiva formada de un marco que lleva dos graduaciones tales, que las divisiones de la una son iguales á la mitad de las divisiones de la otra. Los *ceros* se corresponden y están sobre la línea horizontal que pasa por el agujero B. La división más alta γ corresponde á la horizontal de C y la división más baja α á la horizontal de A, es decir las líneas A α BB y Cγ son paralelas al nivel.

Un pequeño bastidor que lleva tres hilos horizontales F, F′, F″, sube ó baja á lo largo de la pinula por medio del pequeño torno T.

Los hilos F, F′ están separados entre sí un espacio igual á tres divisiones de las pequeñas y los F, F″ un espacio igual á tres divisiones de las grandes, esto es: un espacio FF″= 2 FF′. Además tiene el bastidor un hilo central vertical que determina el plano de colimación, paralelo á la regla de la alidada.

La pínula objetivo puede resbalar á lo largo del cilindro que cubre el nivel, acercándose ó alejándose de la ocular y pudiéndose conocer la separación de dichas dos pínulas por la graduación grabada en el cilindro.

Se ve claramente que contamos con dos valores de z constantes. El FF′ sirve para las distancias de 75^m á 150^m con la escala pequeña y el FF″ para las distancias de 15^m á 75^m con la escala grande; esto es: que siempre se cuenta la separación de los hilos usados como de $3\,l$, l siendo el valor de cada división. El valor de α será variable corriendo la pínula móvil, y el de Z constante eligiendo una mira invariable del tipo de la de la fig. 162, pero de 3^m de longitud.

Sea β (fig. 172) el agujero ocular, MN la mira de 3^m y ff' los hilos. La pínula se ha movido acercándola ó alejándola de β hasta conseguir que los hilos referidos corten exactamente las líneas de fe de las placas ó tablillas M y N. Entonces tendremos:

$$\frac{MN}{ff'} = \frac{3^m}{3l} = \frac{\beta N}{\beta f'}$$

de donde

$$\beta N = A = \frac{3^m}{3l} \cdot \beta f'$$

Midamós una distancia A, por ejemplo 100^m, y señalemos en el cilindro el punto correspondiente á la posición de la pínula. Se fijará la longitud $\beta f'$ que, dividida en 100 partes, nos dará por la simple lectura del número de divisiones para cada posición de la pínula el número de metros correspondientes á la distancia de la mira á β, puesto que siempre subsistirá la relación de semejanza de los triángulos $MN\beta$, $ff'\beta$.

Para distancias menores de 75^m la mira de 3^m ocupa ya mayor espacio que el ff', y entonces se toman los dos hilos ff'' y repitiéndose la operación anterior se determina otra escala sobre el cilindro horizontal, que en resumen, no es sino una cuyas partes son de doble extensión que las de la escala primero trazada, puesto que el lado ff'' es doble del ff'.

Lo dicho basta para comprender este instrumento que las figuras explican todavía más claramente. La corredera lleva un vernier (1) para apreciar décimos de metro, pero creo no se requiere el uso de este instrumento, dada la poca aproximación obtenida por medio de visuales sin telescopio.

270. Hemos concluído este Capítulo, quizá el más interesante del presente volumen, y á pesar de la extensión que le dimos, pasamos en silencio numerosos aparatos diastimométricos de suma utilidad. Al describir los instrumentos topográficos completos, todavía daremos nuevos datos sobre la materia que acabamos de exponer, y en el segundo volumen,

(1) Véase el siguiente Capítulo.

al explicar los levantamientos por los métodos de Porro y Moinot, al hablar de la poligonación y de los cálculos de las distancias observadas con estadia, detallaremos aún más el interesante argumento de las páginas que acabamos de recorrer.

CAPITULO XI.

Medida de los ángulos.

271. *Goniómetros.*—Hemos fijado puntos, líneas y planos, determinado la posición de los planos coordenados y aprendido á medir líneas. Sólo nos resta explicar cómo se miden los ángulos comprendidos entre las direcciones á fin de tener en las líneas y los ángulos los elementos necesarios para aplicar fórmulas que nos hagan conocer el valor de las coordenadas de los puntos observados.

Los órganos medidores se agruparán en seguida de la mejor manera, y darán el instrumento completo que á todos reuna ó á parte de ellos, según el fin á que el instrumento se destine.

La medida de los ángulos se efectúa directamente por medio de círculos graduados dispuestos en el plano que contiene los lados del ángulo, y por consiguiente deben tenerse dos órganos: el que fija las direcciones concurrentes en un punto y el círculo graduado cuyo centro es el punto de concurrencia.

El conjunto de esos dos órganos se llama *goniómetro* y materialmente se construye montando una regla con pínulas ó un telescopio colimador sobre un eje que gire en el taladro central de un disco metálico dividido en su circunferencia. El visador al girar arrastra un índice que señala sobre el círculo, inmóvil durante el desalojamiento del visador, el arco recorrido por el índice. Puede el arreglo ser contrario al des-

crito: quedar inmóvil un índice y girar el círculo graduado unido invariablemente al visador; el resultado se comprende que es idéntico.

La parte giratoria que lleva el visador se llama en general *alidada.*

Como vimos en el Capítulo VII (núm. 158), aprovechando la propiedad de una aguja imanada de permanecer indicando una dirección constante, se pueden también medir ángulos moviendo un círculo graduado, en cuyo centro está apoyado el punto medio de la aguja.

Igualmente vimos ya en el Capítulo III, que por medio de reflectores pueden también medirse ángulos. Por lo tanto tendremos tres clases de goniómetros: goniómetro mecánico al que se llama simplemente goniómetro, brújula topográfica y goniómetro de reflexión. En el presente Capítulo sólo nos ocuparemos del primero; estudiaremos el segundo en el Capítulo XIII y el último en el XIV.

272. *Sistemas de graduación.*—El ángulo medido puede expresarse de varios modos: en fracciones de la circunferencia, en partes del radio, por sus funciones trigonométricas, etc.

Los círculos graduados se emplean para el primer modo de expresión y se dividen en un número de partes iguales llamadas *grados.*

Se ha convenido en hacer de 360 el número de grados de la circunferencia en el sistema llamado *sexagesimal;* el grado se divide en 60 minutos y el minuto en 60 segundos. Ya sabemos la manera de escribir una lectura en este sistema, el más antiguo de los de graduación angular. Los grados se expresan con el signo °, los minutos con el ′ y los segundos ″; las fracciones menores de un segundo se escriben en forma decimal.

Por ejemplo escribimos:

$$36^\circ — 10' — 40,''32.$$

En otro sistema de graduación llamado *centesimal,* la unidad

es el cuarto de círculo que se divide á su vez en 100 grados, el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos.

Representaremos el cuarto de círculo ó cuadrante con la letra ^{q} y escribiremos por ejemplo:

$$0.^q394762$$

ó lo que es más común, tomando el grado como unidad, escribimos la cantidad anterior:

$$39.^g4762$$

representando el grado centesimal con el signo ^{g}

En francés se diferencían al hablar los grados de una y otra división, llamando á los sexagesimales *degrés* y *grades* á los centesimales.

La división centesimal se comenzó á usar á fines del siglo pasado y cada día va generalizándose más; presenta sobre la antigua sexagesimal ventajas semejantes á las de las medidas métricas sobre las variadas antiguas, y parece excusado afirmar una vez más la conveniencia para los cálculos de un sistema de base decimal. (1)

273. Como hemos visto varias veces en el curso de este libro, también se expresan las medidas angulares, sobre todo si se trata de ángulos pequeños, dando la longitud del arco correspondiente al ángulo por representar, en partes del radio del arco medidor.

En este sistema, siendo el radio igual á uno, el ángulo de un cuadrante tiene por expresión $\frac{\pi}{2}$ en la que π es igual á tres radios, 14159 cienmilesimos de radio. El ángulo de un grado sexagesimal será $\frac{2\pi}{360}$ y el de un centesimal $\frac{2\pi}{400}$.

En general el ángulo de a° ó de a^G será:

$$\frac{2\pi a^\circ}{360} \qquad \frac{2\pi a^G}{400}$$

(1) Véanse al fin de este volumen las tablas para convertir grados centesimales en sexagesimales y viceversa.

El arco cuya longitud es igual al radio, corresponde á los ángulos de:

$$57° \; 17' \; 45'' = 3437.'45 = 206265''$$

y de

$$63.^{G}66204 = 636620 \text{ diezmilésimos de G.}$$

Es bien sabido el modo de representar ángulos por el valor de las líneas trigonométricas correspondientes: seno, tangente, etc., y que estas expresiones traen simplificaciones en los cálculos.

274. El círculo graduado que forma una de las dos partes del goniómetro se divide en un número de partes igual al de grados, según la división adoptada, marcándolas por medio de incisiones rectas, *normales* á la circunferencia y cuya longitud y anchura se determinan por consideraciones que adelante expondremos. Si la separación entre dos incisiones es bastante grande como consecuencia de las dimensiones del círculo, se puede el grado á su vez dividir en un número dado de partes iguales, que permitirán apreciar mejor la posición del índice móvil cuando, como pasa comunmente, no cae con toda exactitud sobre la señal de un grado entero.

Si el índice se mueve acompañando un anteojo colimador, sabemos que éste puede tener bastante potencia óptica para apreciar la verdadera línea visual ó lado del ángulo por medir, con un error de poquísimos segundos, y sería de desearse que la precisión suministrada por la coincidencia de la graduación angular con el índice fuera de igual categoría á la obtenida por la colimación, á fin de mantener entre las dos partes constitutivas del goniómetro la estrecha relación de uniformidad de potencia, pues no alcanzándola se hace ilusoria la de un órgano desde el momento que el otro es incapaz de igualarla.

Si se piensa en la pequeñez del espacio correspondiente á un grado en un círculo de las dimensiones admisibles en un instrumento portátil, se comprende desde luego que, aun dado caso de que fuera posible mecánicamente dividirlo en, diga-

mos 60 partes que corresponden á minutos, la separación de los trazos indicadores sería tan pequeña que escaparía á la vista humana. En efecto, como ya sabemos, el ángulo de 90″ es el menor que debe subtender un objeto para ser visible. A la distancia de 20^{cm} de la visión distinta, la cuerda correspondiente á los 90″ es de $0^{mm}087$; este es el menor espacio que debe haber entre dos trazos para que no aparezcan como uno solo. Siendo ese espacio correspondiente á un minuto, el grado tendrá $5^{mm}22$ y el círculo un diámetro de 60^{cm}, inaceptable para un instrumento topográfico.

Si para aumentar la potencia del ojo nos valemos de una lente de aumento, podrá reducirse el diámetro del círculo en razón inversa de la potencia de la lente, pero entonces será el grado tantas veces menor é imposible el subdivirlo en 60 partes.

275. *El vernier ó nonius.*—Pierre Vernier tuvo la ingeniosa idea del pequeño aparato que general y justamente lleva su nombre (1), y que permite apreciar fracciones de grado sin que la división se haga en el grado mismo, sino en un espacio mayor é independiente, anexo al índice de la rotación de la alidada.

Sea $a\,b$ (fig. 173) una parte de un círculo graduado según uno de los sistemas citados; tomemos un número de divisiones $(x - 1)$ sobre ese arco y sobre otro $a'\,b'$ concéntrico al $a\,b$ tomemos una longitud igual á $(x - 1)$, la cual dividimos en x partes iguales.

Si llamamos L la longitud de cada una de las divisiones del círculo ó limbo graduado, y l la longitud de cada división del vernier $a'\,b'$, puesto que ambos arcos son iguales tendremos:

$$L\,(x - 1) = l\,x$$

de donde

$$l = L\,\frac{(x-1)}{x} = L - \frac{L}{x}$$

(1) También se llama nonius este aparato por atribuirse su principio á Pedro Núñez. Creemos más probable que Vernier sea el inventor.

y en consecuencia:

$$L - l = \frac{L}{x}$$

Esto es: *que la diferencia entre una división del círculo y una del vernier es igual al valor de una división del limbo dividida por el número de divisiones del vernier.*

Si la línea que en el vernier A de nuestra figura 174 lleva el cero, es el índice móvil de que hablamos y su posición es tal que cae en prolongación de un grado del limbo, la lectura de la graduación será facilísima; pero si esto no acontece sino que viene á un punto intermedio como en la figura 174, será preciso apreciar el espacio desde la graduación 22 al índice cero. Veamos cómo se consigue hacer esa apreciación.

Notemos que la división 3 del vernier coincide con una del limbo y, según acabamos de demostrar, difiriendo las divisiones del vernier de las del limbo la cantidad $\frac{L}{x}$ que en nuestro caso es $\frac{1°}{10} = 0°1$, resulta que el espacio entre la división 2 del vernier y la cercana del limbo es de 0°1, el espacio entre la división 1 y la del limbo 23° es de 0°2, y el espacio entre el índice 0 y la división 22° es de 0°3, de suerte que el índice señala 22°3.

El valor de la fracción apreciable de división es igual por consiguiente á $\frac{L}{x}$ y se llama esta cantidad *aproximación del vernier*. Vemos ya claramente que con este artificio se ha obtenido el mismo resultado que dividiendo el grado en diez partes, pero el problema mecánico de dividir una circunferencia pequeña en 3600 ó 4000 partes, se ha simplificado dividiéndola sólo en 360 ó 400 partes, y agregando la pieza independiente dividida en diez. Además se ha conseguido evitar la excesiva cercanía de las incisiones, que llegaría hasta la contigüidad si se deseara alcanzar mayor aproximación, como de hecho se logra en los instrumentos topográficos comunes.

La lectura de la indicación del índice *cero* comprenderá

(excepto en el caso poco común de coincidencia del cero con una división) dos operaciones:

a) Una lectura directa de la graduación del limbo hecha con la línea *0* del vernier.

b) La apreciación de *una fracción de división* del limbo, hecha por medio de la graduación del vernier buscando la coincidencia de una división del uno con una del otro, y multiplicando *la aproximación* propia del vernier $\left(\frac{L}{x}\right)$ por el número de divisiones del *cero* á la coincidente. Estas divisiones se cuentan con facilidad porque van numeradas de cinco en cinco, ó de diez en diez cuando son en número, por ejemplo, de treinta y las correspondientes al 5, 15, 25, etc., se distinguen por un trazo más largo.

Un grado de aproximación muy común en los goniómetros de los instrumentos topográficos es el de 1′. Se obtiene por lo general dividiendo el grado en dos mitades, y haciendo un vernier de 30 divisiones que comprendan 29 del limbo, porque en ese caso

$$\frac{L}{x} = \frac{30'}{30} = 1' = a$$

y se dice en lenguaje corriente que el vernier es de minuto.

Una aproximación de esta clase sin el vernier, ya vimos es de imposibilidad práctica. Veremos más tarde otro medio óptico de alcanzarla.

Como ejemplo para que el lector se ejercite en esta sencilla é importante cuestión, consideremos un limbo dividido en grados sexagesimales y cada grado en cuartos, y un vernier de 30 divisiones iguales á 29 del círculo. Tendremos:

$$\frac{L}{x} = \frac{15'}{30} = 30'' = a$$

En una palabra, el constructor puede en principio elegir arbitrariamente el valor de a que necesita para su goniómetro, y fija los de L y de x de tal suerte que su relación sea igual á a; pero consideraciones de otro orden vienen á impo-

nerle límites que no puede sobrepasar dentro de las condiciones exigidas por un instrumento portátil.

277. *Precisión dada por el vernier en relación con las dimensiones del limbo y el aumento de la lente.*—La primera limitación es, como ya dijimos, la impuesta por la inconveniencia de los grandes círculos. Si éstos se reducen á tener pequeños diámetros, los grados resultan pequeños y se hace ilusorio el agregar un vernier subdividido en muchas partes, porque al disminuirse en la fórmula $\frac{L}{x}$ el nnmerador y aumentarse el denominador, teóricamente se hace más pequeña la fracción apreciable, pero en la práctica al llegarse al límite conocido impuesto por la agudeza de la vista, el observador ve, no ya una sino dos ó más divisiones del vernier en coincidencia con las del limbo y resulta ilusoria la precisión, puesto que se toma la coincidencia más probable en la imposibilidad de determinar la cierta.

Quizá parezcamos excesivamente redundantes y las verdades que afirmamos bastante claras para no requerir grande esfuerzo imponerlas, pero nos servirá de justificación el que hay *constructores* que las ignoran, ó si las saben no las aplican en los instrumentos que fabrican.

El vernier, repetiremos en otra forma, no es ni puede ser un instrumento que permita apreciar lo que escapa á nuestros sentidos, aumentando su penetración; es un artificio mecánico para subdividir un pequeño espacio en un mayor número de partes que el posible prácticamente dentro del espacio mismo.

278. Busquemos el grado de aproximación dado por el vernier, pero no ya por la simple división de $\frac{L}{x}$, sino *por la relación entre la potencia del ojo, el aumento de la lente auxiliar de las lecturas y el radio del círculo dividido.*

Sea R el radio del limbo graduado, M el aumento de la lente auxiliar, a la fracción por apreciar dada en seguudos y d la distancia de la visión distinta (200^{mm}).

La menor magnitud apreciable á la simple vista será:

$$\frac{90''}{206265''} \cdot d$$

y la magnitud absoluta de a tendrá por expresión:

$$\frac{R}{206265} \cdot a$$

Si la lectura se hace á la simple vista tendremos la condición:

$$R\,a = 90''.\ d = 90 \times 200 = 18000$$

Pero si las lecturas se hacen con la lente auxiliar de aumento M:

$$M\,R\,a = 18000; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (p)$$

de la cual se deduce uno de los tres elementos: aumento, radio del limbo ó aproximación, dados los otros dos.

Si la división es la centesimal la agudeza de la vista es de:

$$90'' = 0.^{G}028$$

y la fórmula (p) será:

$$M\,R\,a' = 5600 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n')$$

en la que a' representa milésimos de grado centesimal.

Con estas fórmulas se juzga si un goniómetro lleva el vernier que conviene á su diámetro y á la lente auxiliar, ó si el constructor hizo un conjunto inconexo de las partes componentes del goniómetro.

Sea, por ejemplo, 10″ la aproximación deseada ó la aproximación teóricamente dada por el vernier que se examina y 8 veces el aumento M de la lente, y busquemos el radio del círculo para que sea satisfecha la condición de visibilidad exacta de las coincidencias de las graduaciones del vernier y del limbo.

Con estos valores, introducidos en la fórmula última, resulta que el radio del círculo graduado debe ser:

$$R = 225^{mm}$$

Un círculo de 45^{cm} de diámetro!!

Ocurre desde luego hacer mayor el aumento, pero esto tiene su límite, porque con los mayores de 7 ú 8 el observador tiene que aproximarse mucho á las graduaciones sobre las que proyecta la sombra de su cabeza y son así poco legibles, porque los choques son frecuentes, etc.; pero aun llegando al aumento de 10, que ya es raro en los instrumentos, el diámetro tiene que ser de 36^{cm}.

279. Si, como es frecuente, encontramos instrumentos que no resisten al sencillo examen que acabamos de indicar, inferiremos que al hacer lecturas en sus limbos graduados veremos no una sino varias coincidencias, y podremos declarar que es ilusoria la precisión que suministran. *Prima di misurare bisogna vedere.*

Buff & Berger, los constructores americanos que varias veces hemos citado, construyen un universal (modelo núm. 1 de su catálogo de 1896), cuyo círculo graduado tiene un diámetro de 156^{mm} y disponen sus divisiones y las de los verniers correspondientes de modo que aproximen 1′, 30″ ó 20″, según lo solicite el comprador.

Con estos datos aplicados á la fórmula resulta ser necesario:

Para la aproximación de 1′ aumento: $M = 4$
„ „ „ „ 30″ „ $M = 7.6$
„ „ „ „ 20″ „ $M = 11.5$

Como el microscopio simple ó lente convergente que se usa para amplificar las graduaciones es una lente de mano, puede afirmarse que podrán con ella apreciarse las coincidencias en el caso de aproximaciones de 1′ y de 30″, pero no en el de 20″, pues, como ya dijimos aumentos de 10 ó más veces no son convenientes. El constructor no dice en su mencionado catálogo cuál es la potencia de la lente portátil que proporciona con cada instrumento.

280. *Diferentes clases de verniers. Equivocaciones en las lecturas.*—Los verniers se disponen de diversas maneras: los representados en las figuras anteriores están numerados en el

mismo sentido que la graduación, son los verniers *directos;* los del tipo de la figura 175, cuya numeración va en sentido contrario de la graduación, y se llaman *retrógrados*, y por último los numerados en arcos iguales á uno y otro lado del índice, como el representado en la figura 176, y son los verniers *simétricos.*

A reserva de tratar en este mismo capítulo sobre los errores y equivocaciones en las lecturas sobre los limbos graduados con la extensión que el asunto merece, indicaremos aquí algunos de ellos que tienen su origen en la disposición de las graduaciones, y sólo se presentan al usar el vernier y no cuando se emplean los microscopios colimadores descritos en seguida.

Algunos constructores numeran sus limbos de derecha á izquierda; esta práctica es peligrosa porque estando habituados, sea al escribir, sea al consultar tablas, etc., á seguir el orden de izquierda á derecha y no el inverso, con frecuencia, por ejemplo, leemos (fig. 177) 22° en vez de los 18° que marca el índice.

Otros constructores numeran sus limbos en ambos sentidos trazando las cifras con inclinaciones contrarias (fig. 178) y disponen un vernier simétrico. Esta práctica es poco recomendable, y la mejor es la de numerar con sólo un orden de cifras y de izquierda á derecha, pues aun cuando al usar la lente se invierte la imagen de la graduación, fácilmente se lleva en cuenta este efecto. La experiencia así lo ha comprobado.

El vernier retrógrado y el simétrico producen equivocaciones semejantes y debe serles preferido el directo.

281. El uso de una lente portátil, aun con vernier y graduación directos, por consecuencia de las involuntarias oscilaciones de la mano del observador suele hacer cometer equivocaciones de 1° y aun 5° por los aparentes desalojamientos de las cifras y rayas. Por consecuencia, es siempre preferible emplear microscopios unidos al instrumento.

Si las líneas de las divisiones son muy largas, si las cifras

están muy lejos del borde de la división, si el microscopio está dispuesto de manera que hace poco cómoda la posición del observador, etc., se corre también el riesgo de cometer equivocaciones por el desalojamiento que debe darse al ojo para pasar de la parte donde se produce la coincidencia del vernier y la graduación, á la parte en que terminan las rayas ó están inscritos los números.

Cuando la longitud de las divisiones es: para las más pequeñas (generalmente medios grados) 1.5 á 1.75 veces el intervalo entre dos divisiones; para las medianas (grados) 1.5 veces la de las rayas pequeñas y para las que corresponden á 5°, 10°....., 2.5 veces la longitud de las rayas pequeñas, se obtienen las mejores elementos para evitar las equivocaciones provenientes de mala proporción de las graduaciones.

La división del grado en dos mitades induce frecuentemente á los principiantes á tomar la lectura menor en medio grado; es decir, que añaden la fracción dada por el vernier al grado anterior sin llevar en cuenta que deben añadirlo al grado y medio anterior. Se evitaría esto no fraccionando el grado, pero entonces el vernier resulta cuatro veces mayor que cuando se hace dicho fraccionamiento y la lectura es molesta.

Es mejor adoptar, á pesar de aquel mal, el vernier pequeño poniendo toda clase de esmero en la observación.

282. *Microscopios compuestos para la lectura de los limbos graduados.*—Se ha buscado en tiempos relativamente recientes el aumentar la precisión de las lecturas angulares, conservando círculos graduados pequeños, y natural era, dada la liga entre los factores: radio del círculo y aumento del microscopio apelar al aumento de la potencia óptica para alcanzar la diminución del radio referido. Pero, como según ya vimos, el límite de aumento es poco elevado en el microscopio simple, se utiliza el compuesto, añadiéndole una retícula cuyo punto central y el centro del objetivo determinan la línea de colimación, según la cual se fijan las direcciones, como detalladamente explicamos al tratar del telescopio.

Sea L (fig. 179) el objetivo de un microscopio compuesto, dirigido al pequeño objeto MN perpendicular al eje y situado á una distancia a de la lente, poco mayor que la longitud focal principal de dicha lente. En mn á una distancia a de L, se formará una imagen de MN real, invertida y más grande que el objeto, cuya imagen podría verse á la simple vista, pero que, para reducir la longitud del aparato reduciendo h como explicamos en el número 90, se visa por medio de una lente ocular l que produce una imagen virtual de mn en $M'N'$, mayor que mn y á la distancia h de la visión distinta.

Siendo p y q las distancias focales principales de las dos lentes, y a, α, b y β las mismas cantidades que consideramos en la Primera Parte, como allí vimos se tendrá para expresión del aumento producido por el sistema de las dos lentes:

$$M = \frac{\alpha\,\beta}{a\,b}$$

y en nuestro caso por ser virtual la imagen $M'N'$, siendo $\beta = -h$, se tendrá:

$$M = -\frac{\alpha\,h}{a\,b}$$

Si, con objeto de que los rayos emergentes de la lente de acomodación l formen un haz cilíndrico que favorece las condiciones de visibilidad, hacemos que la imagen $m\,n$ se disponga en el foco principal de l, tendremos $b = q$ y la fórmula:

$$M = -\frac{\alpha\,h}{a\,q};$$

y M expresará la *relación entre dos ángulos:* aquel bajo el cual se ve una dimensión del objeto real á la distancia h con la simple vista, y aquel bajo el cual se presenta la imagen de la propia dimensión visando á través del sistema óptico.

De esta manera ángulos que, por estar bajo el límite de 90″, pasan inadvertidos para la agudeza del ojo, son sustituídos por ángulos mayores, y en haciéndose de 90″ ya se percibirán magnitudes que sin el microscopio no podrían obser-

varse, de tal modo que, si $n < 90''$ es el ángulo correspondiente á la separación de dos líneas de la graduación, dicha separación será visible tan pronto como M sea tal que:

$$Mn = 90''$$

283. Si á la facultad de aumentar añadimos la de fijar direcciones por medio de una retícula, habremos preparado un índice más delicado que el común para las lecturas sobre los limbos.

Este índice puede permanecer fijo en un punto del microscopio, ó mejor dicho, sólo desalojarse la retícula á lo largo del eje óptico para permitir la acomodación, ó puede tener movimientos en un plano perpendicular al eje citado. En el primer caso, además, puede el índice estar formado por un hilo ó por varios. Examinaremos esos diversos casos; pero antes nos ocuparemos de la construcción práctica de los microscopios compuestos, que no es tan elemental como la teórica, tal como vimos para los telescopios, que no se reducen á las dos lentes, ocular y objetiva, estrictamente necesarias, sino que se completan por otras que vienen á corregir los defectos de los sistemas de sólo dos lentes. Nos referimos á la corrección de las aberraciones, aumento de campo, etc., que estudiamos detalladamente en la Primera Parte.

El objetivo se forma de dos lentes, una de Crown y otra de Flint para corregir la aberración cromática, y el ocular también de dos lentes, como los de Ramsdem ó Huyghens.

Como el microscopio se coloca á una distancia del objeto poco mayor que la longitud focal p del objetivo, para no alejarlo demasiado del objeto visado, se toma un objetivo de corto foco, y dada esta condición será preciso para evitar las aberraciones de figura y cromática, tomar una lente de poca abertura y la claridad se disminuirá, por lo cual se emplean reflectores que iluminen intensamente el pequeño objeto visado.

La imagen del objeto debe formarse sobre el plano de la retícula, y el ocular disponerse de manera que los hilos se vean con claridad. Para conseguirlo debe el microscopio entero poder acercarse ó alejarse del objeto, hasta que se realice la primera condición, y el ocular separadamente debe moverse para que se verifique la segunda á fin de lograr que no haya *paralaje*, fenómeno que explicamos al tratar del telescopio. Nos referimos á las consideraciones hechas entonces que son aplicables al caso actual.

284. *Microscopios colimadores.*—Haciéndose la lectura de las graduaciones en el sentido normal al radio del limbo, es innecesario que la retícula sea un crucero de hilos; basta que tenga uno paralelo á las líneas de la graduación y que desempeñe el papel de *índice óptico.*

La fig. 180 representa el campo de un microscopio dirigido sobre una graduación angular centesimal. Los números inscritos representan grados y cada uno está dividido en cinco partes. La línea A B representa el hilo del microscopio que sustituye al índice cero, y que, como éste, puede girar al moverse la alidada que en el caso actual lleva unidos el telescopio y el microscopio.

Si el hilo cae sobre una línea exactamente, la lectura no tiene dificultad alguna, como pasa cuando el índice del vernier corresponde con una división del limbo; pero en el caso más frecuente de presentarse el hilo en el espacio entre dos rayas, la medida del intervalo entre la raya y el hilo se hace por uno de dos métodos usuales: se aprecia á ojo la fracción de división ó intervalo, ó se mide el mismo por medio de un tornillo micrométrico; la precisión de la lectura del intervalo en uno ú otro método, tendrá la expresión ya demostrada:

$$M\ R\ a = 18000.$$

Estudiemos ambos procedimientos.

285. *Microscopios de estima ó de hilos fijos.—Precisión de las lecturas.*—"Es una verdad que la práctica demuestra y confir-

ma cada día, que la valuación á ojo de la fracción de un intervalo entre dos rayas de una graduación, puede hacerse entre límites de exactitud, que parecerían imposibles á primera vista."

"Si á la valuación á ojo se agrega el artificio de la multiplicidad, y la posición del índice se deduce de la media aritmética de todas las valuaciones parciales, se llega á resultados de maravillosa exactitud. El ojo ejercitado en la estima, es otra forma preciosa del vernier. La posición del hilo A B (fig. 180), entre las dos rayas que lo comprenden puede, por estima, determinarse, segun algunos observadores hasta el $\frac{1}{20}$ del intervalo, según otros hasta el $\frac{1}{50}$, y no faltan quienes pretenden *sentir* el centésimo."

"Si se supone que en lugar de un hilo se tengan varios, n por ejemplo, y de la media aritmética de la posición de todos se llega á una determinación única, correspondiente á un hilo imaginario que ocuparía la posición media de los hilos verdaderos, el error medio probable de ésta será igual al error medio probable de cada una, dividido por la raíz cuadrada del número de determinaciones. Entonces si ε es el error medio probable cometido en la estima de la posición de cada uno de los n hilos, será $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ el error medio probable de la media aritmética de las n lecturas."

"Hirsch y Plantamour, dos geodestas contemporáneos de grande autoridad, y encargados de la nivelación de precisión de la Suiza, han podido convencerse por medio de pruebas numerosísimas, de que la media aritmética de las tres determinaciones independientes de las posiciones de tres hilos sobre una graduación, resultaba más exacta que la medida directa obtenida, en idénticas condiciones, con un tornillo micrométrico que daba sobre su tambor graduado el centésimo del intervalo estimado. Y encontraron, precisamente, que mientras el error medio de la media de las tres lecturas á estima era de $\pm 0''838$, el de la lectura con el tornillo micro-

métrico era de $\pm$ 1″112. Pasando del error medio de la media al error de cada una, se vendría á encontrar, para el caso de los instrumentos experimentados por los citados Sres. Hirsch y Plantamour, que sobre cada hilo la estima directa debía estar afectada de un error de cerca de $\frac{1}{50}$ del intervalo. En todo caso, siempre será lícito admitir que la media de las tres lecturas en los tres hilos, equivale al menos á la medida con tornillo micrométrico que dé el centésimo del intervalo." (1)

Pero como dijimos al hablar de los micrómetros en el Capítulo anterior, no admitiremos una fracción tan pequeña como $\frac{1}{50}$ para los casos comunes en la práctica, sino solamente que *por medio de la estima con un solo hilo, se puede apreciar el vigésimo del intervalo, siempre que la potencia óptica del instrumento haga todavía sensible esta fracción.*

Se comprende la mayor facilidad para las lecturas por estima cuando se usa división centesimal, por ser las fracciones apreciadas inmediatamente sumables con las lecturas de las divisiones enteras, mientras que con la graduación sexagesimal préviamente hay que hacer la multiplicación de la fracción decimal por el valor de la unidad mínima apreciada. Por consiguiente, en los nuevos instrumentos topográficos que llevan microscopios como los descritos, la graduación de los límbos es siempre centesimal.

286. *Círculos de los Cleps.* (2)—Propongámonos determinar los elementos de varios círculos graduados, y para ejemplo tomamos los tamaños adoptados por Salmoiraghi según los da en su obra "Les Cleps" (1888), que difieren de los dados

(1) Salmoiraghi—Geometria applicata, págs. 208 y 209.

(2) F. Bardelli, distinguido constructor de instrumentos de Torino, Italia, fabrica un taquímetro del tipo Troughton & Simms, según fué combinado por el Profesor Jadanza, que presenta la aplicación de microscopios colimadores de estima á los instrumentos topográficos. Los círculos son de 185^{mm} de diámetro, divididos en grados centesimales y cada grado en décimos: se puede apreciar el décimo de cada parte ó sea el centésimo de grado. Los hilos del microscopio son tres. Véase también el taquímetro descrito en el núm. 343.

por el mismo distinguido constructor en su Geometria applicata de edición anterior (1884).

Para el *Cleps de modelo grande* se desea apreciar el medio centésimo de grado centesimal y como vimos que se estima la posición del hilo hasta el vigésimo del intervalo de dos rayas, será preciso hacer este intervalo de $20 \times 0^{g}005$, es decir de $0^{g}1$ y el grado se dividirá en 10 partes. Construyendo el microscopio con un aumento $M = 38$ tendremos:

$$R = \frac{5600}{38 \times 5} = 29^{mm}$$

El círculo deberá tener un diámetro de 58^{mm}.

Para el *Cleps de modelo mediano*, se desea la aproximación de un centésimo de grado centesimal y usando el aumento $M = 28$, se tendrá:

$$R = \frac{5600}{28 \times 10} = 20^{mm}$$

El diámetro del círculo graduado deberá ser de 40^{mm}.

Para el *Cleps de modelo pequeño* se quieren apreciar 2 centésimos de grado centesimal y empleando $M = 17$, resulta:

$$R = \frac{5600}{17 \times 20} = 16^{mm}$$

El círculo graduado deberá tener un diámetro de 32^{mm}.

En extracto los elementos de los círculos de los Cleps, son los siguientes:

Modelo grande,	diám. del círc°,	58^{mm}	$M=38....a'=0^{g}005$
„	mediano, „ „ „	40^{mm}	$M=28....a'=0^{g}010$
„	pequeño, „ „ „	32^{mm}	$M=17....a'=0^{g}020$

Para aumentar la precisión de las lecturas se usan varios hilos en vez de uno solo, y al efecto el Cleps grande tiene microscopios provistos de cinco hilos, y de tres los Cleps mediano y pequeño.

En estas circunstancias, el error probable de la media de cinco hilos en el primer caso, y de tres en los dos últimos, será:

Cleps modelo grande:

$$\pm\frac{a'}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0^{G}005}{\sqrt{5}} = \pm\, 0^{G}0022 \text{ con cinco hilos}$$

$$\pm\frac{a'}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0^{G}005}{\sqrt{3}} = \pm\, 0^{G}0029 \quad \text{„ tres „}$$

Cleps modelo mediano:

$$\pm\frac{a'}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0^{G}010}{\sqrt{3}} = \pm\, 0^{G}0058 \quad \text{„ „ „}$$

Cleps modelo pequeño:

$$\pm\frac{a'}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0^{G}020}{\sqrt{3}} = \pm\, 0^{G}0116 \quad \text{„ „ „}$$

Las figs. 181, 182 y 183 representan próximamente en su magnitud aparente los campos de los tres modelos de Cleps.

La graduación material en 4,000 partes de círculos tan pequeños como los de 58^{mm} y 40^{mm} de diámetro y en 2,000 partes del de 32^{mm} de diámetro, ha sido un notabilísimo resultado conseguido merced al uso de un bronce blanco especial, muy duro, de un buril de diamante y de una magnífica máquina de dividir, construída por el mismo Porro.

La graduación de los círculos se efectúa siempre por copia mecánica de una graduación tipo, grabada sobre un círculo de gran diámetro.

En los de los Cleps la numeración crece de derecha á izquierda y por la inversión de la imagen de ella hecha por el microscopio, se ve aumentar de izquierda á derecha, en el orden que nos es más familiar. Apareciendo en el campo del microscopio varias cifras que expresan grados, no hay el temor de equivocaciones mencionado al hablar del vernier.

El Ingeniero Borleti, profesor de la Escuela Politécnica de Milan, ha hecho una serie de experiencias para determinar el error medio de los ángulos medidos con un Cleps de modelo grande. Determinó por treinta observaciones hechas con un

teodolito de Starke y Kammerer de gran precisión, un ángulo que le resultó de

$$78^\circ\ 48'\ 46.''099$$

con un error probable de

$$\pm\ 0''461$$

Midió en seguida el mismo ángulo con un Cleps Salmoiraghi reiterándolo diez veces, y obtuvo ya reduciendo á división sexagesimal el resultado que en centesimal dió el instrumento:

Usando los cincos hilos..... $78^\circ\ 48'\ 51.''98$
y sólo usando el hilo central .. $78^\circ\ 48'\ 55.''71$

El primer valor difiere del que debemos considerar como exacto: el obtenido con el teodolito geodésico:

$$5.''881 = 0.^{g}0011$$

y el segundo difiere:

$$9.''611 = 0^{g}0022.$$

error despreciable en la más exacta operación topográfica é inferior al límite de $0.^{g}005$ que admitimos para una lectura del limbo graduado con un solo hilo, como es inferior el de $0^{g}0011$ al de $0^{g}0022$ para los cinco hilos.

Los errores probables de las medias de las diez observaciones son, respectivamente en el caso de un hilo y en el de cinco, de

$$\pm\ 0^{g}0012 \text{ y } \pm\ 0^{g}00067.$$

Borletti dice que cada uno de los diez resultados es la media de tres medidas, y si deseamos conocer la desviación media de *una sola* medida, multiplicaremos las desviaciones antes dadas por $\sqrt{3}$.

Tomaremos la lectura de un solo hilo y tendremos:

Error probable de una medida.... $0.0022 \times 1.7 = 0^{g}0038$ $= 12.''3$ con Cleps grande.

Y como la aproximación del Cleps mediano y la del pequeño están con la del grande en la proporción de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, si del dato anterior se quiere inferir el error probable de una medi-

da con estos instrumentos, habrá que multiplicar el valor último obtenido respectivamente por $\sqrt{2}$ y $\sqrt{4}$ y tendremos:

Error probable de una medida:

$$0^G0054 = 17.''5 \text{ con Cleps mediano;}$$
$$0^G0066 = 24''6 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{pequeño.}$$

Conviene que el lector se ejercite sobre las varias figuras que hemos dado, representando el campo de los microscopios, en hacer las lecturas que en ellas damos como ejemplos. La correspondiente al Cleps pequeño (fig. 183), se ve con dos graduaciones, porque en estos instrumentos, con un solo microscopio se ven simultáneameute los dos círculos, horizontal y vertical, como explicaremos adelante (Cuarta parte, Capílo XII).

287. La lectura con microscopios colimadores está lejos de presentar la complicación que parece á primera vista; es seguramente más fácil que la lectura con verniers y por la analogía con la manera de leer los hilos de las estadias, la operación se hace todavía más rápidamente al no obligarse al operador á cambiar, permítaseme el término, de estilo de observación.

La fig. 184 representa una graduación vista por un microscopio de estima de tres hilos. Cada grado está dividido en diez partes.

288. *Microscopios micrométricos.*—En el anterior Capítulo dimos el principio de los instrumentos microscópicos é hicimos ver cómo su empleo permite la medida de pequeñísimos espacios. En el caso del Capítulo referido, medíamos la magnitud de la pequeña imagen de una mira; pero se comprende que de igual modo pueden servir para medir la imagen de una división de un limbo graduado ó de parte de una división, siempre que se disponga el aparato óptico conveniente para producir una imagen agrandada de la dicha graduación, á fin de llevar la medida de un espacio menor á la de otro ma-

yor; esto es, siempre que se unan el microscopio que da la imagen y el micrómetro que la mide.

El conjunto de ambos órganos tiene generalmente la disposición que señala la fig. 185. En O se encuentra el objetivo y en P y Q las lentes que constituyen el ocular compuesto. En C se ve el círculo graduado cortado por un plano vertical que pasa por su diámetro, y es el mismo que produce al pasar por el eje óptico del microscopio la sección dada en la figura.

La imagen de la graduación se forma en el plano de la cara superior de la pieza **m** sobre la que están dispuestos dos hilos de araña, paralelos y muy cercanos entre sí, y normales á la circunferencia del limbo. La separación de los hilos es bastante para que la imagen de una raya de la división se vea entre ellos (como en la fig. 186). Esta disposición se ha adoptado porque la experiencia comprueba que se estima mejor la exacta bisección del intervalo entre los hilos, que la sobreposición de un hilo sobre una raya. En **t** se observa el círculo ó tambor dividido del micrómetro, que, al girar, hace mover la pieza **m** que lleva los hilos, en un plano perpendicular al eje óptico del microscopio. El paso del tornillo está calculado de manera que cuando el tambor hace exactamente una revolución, los hilos pasan de una división del limbo á la siguiente; de esa manera, las fracciones de revolución acusadas por un índice, corresponden á fracciones de división.

289. Veamos cómo se ejecuta una observación. Suponemos el telescopio dirigido exactamente al punto por visar, y vemos por el ocular del microscopio la indicación del limbo. Aparecerá una imagen como la representada en la fig. 186. Colocamos el tambor en el cero como en la misma figura se ve, y para asegurarnos de que no hay error de una revolución entera, nos guiamos por la marca **t** del dibujo que cae entre los hilos cuando ocupan su justa posición. Esta es la que corresponde al *índice de las medidas;* es la equivalente al cero del vernier y al hilo central de los microscopios colimadores.

Se trata ahora de apreciar el espacio del índice á la división inmediata menor, para añadir á ésta el valor del intervalo de la división á la posición del índice que es, repetimos, el cero del tambor. La apreciación se hace girando el micrómetro hasta que los hilos ocupen la posición marcada en el dibujo con dos líneas de puntos y leyendo las graduaciones recorridas por el tambor frente al índice respectivo i.

En nuestro ejemplo el grado está dividido en 6 partes; luego cada división representa 10′; cada una de las 10 divisiones principales del tambor corresponde á 1′ y cada división de las últimas de dicho tambor representa 10″. La cabeza del micrómetro debe tener en ese caso 60 divisiones.

290. Lo mismo que con el vernier con el microscopio micrométrico se hace la lectura en dos operaciones:

a. Una *lectura directa* de la graduación del limbo hecha con los hilos en la posicion cero del micrómetro.

b. La apreciación de *una fracción* de división del limbo hecha girando el micrómetro, llevando los hilos hasta bisectar la división antes leída y leyendo en el tambor graduado las divisiones que se giró éste para multiplicarlas por el valor de una, ó sea la *aproximación* del micrómetro.

Para terminar la descripción del aparato que nos ocupa, notemos en la figura que está formado de dos tubos A y B; el primero porta-ocular y el segundo porta-objetivo, que deslizan uno dentro del otro, y que en S se halla un espejo inclinado 45° sobre el eje óptico, para reflejar hacia la graduación é iluminarla mejor, la luz difusa de la atmósfera. El tubo que lleva el espejo puede girar al rededor del eje para aprovechar la luz más intensa en el acto de la observación.

El microscopio está unido á la alidada del instrumento (de la cual se ve en N una parte) por medio de dos fuertes anillos V_3 y V_4 y el constructor lo fija de modo que el objetivo O quede á la distancia conveniente de la graduación C para que la imagen de ella se forme en el plano mismo de los hilos.

En cuanto al tubo A puede desalojarse para conseguir la

exacta visión de los hilos dependiente de la vista del observador. Si el ocular es del tipo Ramsdem se mueve el ocular entero, y si es del Huyghens, como el de la figura nuestra, sólo se desaloja la lente Q, hasta que simultáneamente sean netamente visibles la graduación y los hilos y se suprima la paralaje.

Satisfecha la condición de no existencia de dicha paralaje, debe investigarse si el tornillo micrométrico tiene efectivamente un paso igual á la separación de las divisiones del limbo, lo cual se reconoce girando el tornillo una vuelta entera y observando si al hacerlo pasan los hilos exactamente de una división á la siguiente, ó mejor aún haciendo girar el tornillo varias revoluciones enteras y probando si con ello se recorre el número correspondiente de divisiones del círculo graduado. El número de revoluciones no debe tampoco ser excesivo, porque se saldría el hilo de la región central del campo fuera de la cual son de temerse deformaciones de las imágenes producidas por el sistema óptico.

291. *Rectificación del micrómetro.*—Ambas pruebas: la de ausencia de paralaje y la de adecuado paso del tornillo micrométrico, nos darán la medida de la bondad del aparato que tengamos entre manos. En general, los constructores satisfacen á una y otra condiciones; pero si así no fuese y el valor de las divisiones del micrómetro no resultare exactamente como se prometió por construcción, puede llevarse en cuenta la diferencia y añadirla con su signo á las lecturas hechas.

Supongamos que, en el caso de nuestro ejemplo anterior, en lugar de corresponder una vuelta del micrómetro á 10′ ó 600″, por consecuencia de mala disposición del aparato corresponde la propia revolución completa á 620″ ó sea un error de 20″ en 600″ igual á 2″ por cada 2′ ó sea $\frac{1}{30}$ como corrección.

Si hacemos una lectura y nos da:

Sobre el limbo.....	10° 20′ 00″
y tenemos que girar el micrómetro 14 divisiones de su cabeza, que representan en el supuesto de buena rectificación 14 × 10″.....	2′ 20″
Será la lectura completa.....	10° 22′ 20″

La cual habrá que corregir disminuyendo $\frac{1}{30}$ á la lectura hecha con el micrómetro:

$$\frac{2'\ 20''}{30} = 4.''7$$

La lectura corregida será:

$$10°\ 22'\ 20'' - 4.''7 = 10°\ 22'\ 15.''3$$

Puede evitarse esta corrección numérica desalojando el microscopio á lo largo de su eje, para que, modificándose la distancia del objeto visado (graduación) al objetivo, se modifique la magnitud de la imagen y sean tales sus dimensiones que correspondan rigurosamente á la revolución del tambor dividido del micrómetro. En nuestro ejemplo, el hecho de representar una revolución mayor espacio del limbo que el deseado, indica que la imagen es más grande $\frac{1}{30}$ de lo que se intentaba; será preciso hacerla más pequeña, y para ello disminuir el aumento que, vimos en este Capítulo, tiene por expresión:

$$M = -\frac{a\ h}{a\ q}$$

modificando la relación $\frac{a}{a}$ puesto que h y q son constantes para un microscopio dado.

Aumentaremos a aflojando el tornillo V_4 é introduciendo un poco el tubo B en el A. Al cambiarse a se modificó a y ya la imagen de la graduación no se formará en el plano que antes ocupaba y se verá borrada la graduación. Entonces se afloja el tornillo V_3 y se mueve el tubo A hasta que se vea

con toda claridad la imagen de las divisiones haciendo desaparecer la paralaje.

Se repite la prueba del paso del micrómetro que permanece constante como movimiento mecánico, pero aplicado á medir una imagen que hemos disminuído. Se repite la operación hasta conseguir que desaparezca el error y entonces se aprietan los tornillos V_3 y V_4.

292. *Precisión de las lecturas con micrómetro de hilo móvil.*— Supongamos un círculo de radio de 67^{mm} y que queramos apreciar $10''$ con cada división del tambor del micrómetro. Tendremos:

$$M \times 67 \times 10 = 18000$$

Se necesitará que el aumento dado por el microscopio sea de 27 veces. Estas cifras corresponden al teodolito modelo inglés fabricado por Bardelli y que lleva micrómetros (fig. 1ª del Catálogo de Enero de 1896).

Salmoiraghi construye varios modelos de instrumentos con microscopios micrométricos (figuras 32 y 57 de su Catálogo de instrumentos topográficos y geodésicos). (1)

Si quisiéramos apreciar $10''$ por medio del vernier, habría que usar, con una lente de $M = 10$, círculos de 360^{mm} de diámetro.

Esta cifra basta para convencernos de la ventaja del uso de los micrómetros para las aproximaciones que lleguen á cifras como la de $10''$ que hemos adoptado en nuestros ejemplos.

En el Capítulo sobre "Medida indirecta de las líneas" hablamos sobre los errores posibles al usar el micrómetro.

El lector completará sus ideas en este particular con lo entonces explicado.

El uso de los microscopios micrométricos en los instrumentos topográficos se ha generalizado en los últimos tiempos (2),

(1) La 57 la damos en el presente libro, figura 231. En M M' se ven los microscopios micrométricos.

(2) Aunque no tanto como el de los microscopios de estima, que son más sencillos y portátiles.

pues antes no se usaron sino en los geodésicos y astronómicos. Muy pronto se adquiere el hábito de servirse de ellos y son las lecturas más rápidas que con vernier, teniéndose la ventaja de que, como cada grado está numerado, se evitan equivocaciones de grados enteros ó medios grados, muy frecuentes con vernier.

293. *Exactitud de las graduaciones.*—Independientemente de los errores de apreciación en el lugar del índice de que hemos hablado, puede un goniómetro dar una medida errónea de un ángulo si la graduación del limbo no es exacta ó si las partes que lo componen no guardan la posición relativa que la teoría les señala.

Estudiaremos primeramente el error provenido de una graduación defectuosa y luego el causado por la excentricidad del eje de rotación de una alidada.

Para investigar si es exacta una graduación se usa del vernier, del microscopio de estima, ó del micrométrico, según el caso.

Si se trata del vernier, se lleva á diversos lugares de la graduación y debe siempre abrazar el mismo número de partes. Recorriendo todas las divisiones del limbo, las coincidencias de la primera y última rayas del nonius con las vecinas de la graduación deben ser simultáneas.

Si la lectura se hace con ayuda de un microscopio de estima, la medida de los arcos comprendidos entre los hilos debe ser siempre la misma, y si se emplea el microscopio, la medida del intervalo entre dos rayas debe ser siempre constante.

Estas investigaciones, además de ser extremadamente dilatadas no son del todo rigurosas, porque al efectuarlas no es posible independerse de otras causas de error, como la de exentricidad, de que luego hablaremos, y podría por esta última juzgarse defectuosa una graduación que no lo sea en realidad.

Pero en general no debe preocuparnos el error de gradua-

ción, porque tratándose de un instrumento siquiera de mediana calidad y de procedencia acreditada, la división de los limbos está hecha por medio de máquinas de dividir que proporcionan resultados de una exactitud muy suficiente para que no sea posible apreciar el error restante, é inevitable en toda operación mecánica, por los medios ópticos al alcance del constructor, siempre más poderosos que los puestos en manos del topógrafo.

294. *Error de exentricidad.*—Los círculos graduados generalmente tienen la disposición que representan las figuras 187 y 188; la primera representa una sección normal al plano del círculo y hecha según un diámetro, y la segunda un limbo visto por su parte inferior para mostrar las nervaduras metálicas que le dan la debida rigidez disminuyendo el peso de la pieza. La graduación, como ya dijimos, se traza sobre una corona en *m* (fig. 187) ó sobre la superficie cónica *n* (1).

El centro del disco graduado tiene un taladro por el que pasa el perno de rotación de la alidada. Se comprende que para deducir los ángulos recorridos por la alidada de la longitud de los arcos recorridos por el índice que ésta arrastra al moverse, es condición indispensable que el eje de rotación coincida con el centro de la graduación.

El constructor se esmera en alcanzar este resultado, aunque no siempre con éxito. Veamos la influencia de una desviación entre los puntos que deben ser coincidentes según acabamos de demostrar.

295. Sea C (fig. 189) el centro de un limbo graduado y supongamos que el eje de rotación de la alidada pase por C' en vez de pasar por el centro C. Llamemos d la pequeña distancia $C\,C'$, y r el radio del círculo.

Dada la pequeñez de d podemos admitir que el punto C' corresponde al centro de estación, pues por mucho que sea el

(1) En los instrumentos delicados la graduación está hecha sobre plata ó platina, porque en estos metales se pueden trazar rayas muy finas y no son oxidables.

esmero para disponer el centro del limbo sobre el de estación, el error que puede cometerse en la operación es mucho mayor que d. Sean m y n los puntos del círculo señalados por el cero del vernier cuando se visan los dos puntos que determinan con el de estación los lados del ángulo por medir, cuyo valor es en nuestro ejemplo $m\,C'\,n$. La lectura que hacemos es el arco de m á n, y por lo mismo obtenemos el ángulo en C en vez del ángulo en C' que es el de las visuales.

Tendremos (designando los ángulos por las letras de sus vertices) el exterior $m\,E\,n$ á los triángulos $m\,E\,C'$, $n\,E\,C$:

$$C + n = C' + m$$
$$C = C' + m - n$$

El error producido por la excentricidad es $m - n$. Para calcularlo llamemos α el ángulo $n\,C'\,C$ y pongamos las ecuaciones:

$$\frac{\text{sen } m}{d} = \frac{\text{sen } (C' + \alpha)}{r}$$
$$\frac{\text{sen } n}{d} = \frac{\text{sen } \alpha}{r}$$

Dado el valor de los ángulos en m y n podremos escribir:

$$m = \frac{\text{sen } (C' + \alpha)}{r \text{ arc } 1''}\, d$$
$$n = \frac{\text{sen } \alpha}{r \text{ arc } 1''}\, d$$

y de consiguiente:

$$m - n = \frac{d}{r \text{ arc } 1''}\Big(\text{sen } (C' + \alpha) - \text{sen } \alpha\Big) =$$
$$= \frac{d}{r \text{ arc } 1''} 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}\, C' \cos\left(\alpha + \frac{C'}{2}\right)$$

Esta ecuación nos dice que el error es inversamente proporcional al radio del círculo; nulo para dos posiciones

$$\alpha + \frac{C'}{2} = 90^\circ \quad \text{y} \quad \alpha + \frac{C'}{2} = 270^\circ$$

y máxima para dos posiciones, en las cuales

$$\frac{C'}{2} = 90^\circ \quad \text{ó sea } C' = 180^\circ$$

y:

$$\alpha + \frac{C'}{2} = 180^\circ \text{ ó sea } \alpha = 90^\circ.$$

Si por ejemplo $r = 10^{cm}$ y $d = 0^{mm}1$ en el caso del mayor error

$$m - n = \frac{2\,d}{r \text{ arc } 1''} = \frac{2 \times 0.^{m}0001}{0.1000}\ 206265 = 412.''53 = 6'\ 52.''53$$

resultado que enseña la importancia del error de excentricidad.

296. Este error es fácilmente eliminable usando dos índices diametralmente opuestos en vez de uno solo. Sea en efecto (fig. 190) C el centro del limbo y C' el de rotación de la alidada; un vernier nos da el arco $m'n'$ y el otro el arco mn, y, según sabemos, la medida del ángulo C' es la media aritmética de estos arcos.

La diferencia de los ángulos leídos acusa la excentricidad de la alidada. Para conocerla bien se coloca uno de los índices á cero, después á 10°, 20°,..... leyendo cada vez con el otro índice; si la diferencia se mantiene constante, es debida á que los índices no están diametralmente opuestos; lo cual no tiene interés; si la diferencia varía con regularidad pasando por dos máximas en posiciones á 90° con dos posiciones de lectura igual en ambos índices, existe un error de excentricidad (1). La figura 191 aclara más lo que acabamos de decir.

297. *Métodos de medición de ángulos.*—En el tomo 2º nos ocuparemos de los métodos para medir ángulos, y allí veremos cómo se obtienen resultados más exactos que los proporcionados por una sola observación. A dicho tomo nos referimos para completar el estudio de esta importante cuestión.

(1) Erede. Topografía, pág. 87.

CUARTA PARTE.

INSTRUMENTOS TOPOGRAFICOS COMPLETOS.

CAPÍTULO XII

Instrumentos topográficos universales.

298. *Condiciones teóricas y clasificación de las universales.*— Hemos estudiado la manera de fijar direcciones y la de medir líneas directa ó indirectamente, examinando los órganos necesarios para establecer la horizontalidad de uno de los planos de coordenadas y la orientación de los dos planos verticales y conocido los medios empleados para medir ángulos.

Un instrumento capaz de dar las posiciones de los planos coordenados y medir las coordenadas polares del punto observado, deberá por tanto consistir en un conjunto armónico de partes mecánicas susceptibles de representar los ejes y de dar la posición relativa de la visual dirigida á un punto determinado del espacio y el valor de ρ.

La figura 192 representa esquemáticamente el instrumento tipo, del cual se derivan otros menos completos destinados á aplicaciones especiales. El eje vertical A, soportado por tres brazos B_1 B_2 B_3 que llevan en sus extremidades unos fuertes

tornillos llamados nivelantes, que forman la base de apoyo de todo el instrumento, sostiene un círculo horizontal graduado *H H*. Este círculo puede girar alrededor del eje *A* ó permanecer unido firmemente á él, aun cuando se gire toda la parte superior del instrumento. Esta consta de una pieza horizontal portadora de los índices que acusan el movimiento de rotación de toda la parte superior (llamada *alidada*) con relacion á la fija *H H*, y consta además de los soportes de un eje horizontal *R R*, del telescopio *T T*, del círculo vertical *V V* y del nivel *N* (fig. 193).

299. Para que el instrumento sea teóricamente perfecto, las partes descritas deben satisfacer á las principales condiciones siguientes:

1ª El eje de rotación del instrumento *(A)* debe ser vertical.

2ª El plano del círculo graduado *(H H)* debe ser perpendicular al eje de rotación, esto es: debe ser horizontal.

3ª El eje de rotación del anteojo *(R R)* debe ser perpendicular al eje vertical *(A)*.

4ª La línea de colimación *(T T)* debe ser perpendicular al eje de rotación horizontal *(R R)*.

5ª El eje del nivel *(N N)* debe ser paralelo al eje horizontal de rotación del anteojo *(R R)*, y en consecuencia perpendicular al eje vertical *(A)*.

6ª El índice del círculo vertical debe marcar 0° cuando la línea de colimación es vertical.

7ª El círculo vertical *(V V)* debe tener su plano perpendicular al eje horizontal de rotación *(R R)*.

8ª La retícula debe guardar respecto de los ejes óptico y mecánico del telescopio su exacta posición.

9ª Los ejes de rotación de las alidadas (vertical y horizontal) debe coincidir con los centros de los limbos graduados correspondientes.

10ª Los índices de las alidadas (verniers ó microscopios) deben ocupar las posiciones simétricas que correspondan á su

número, esto es, diferir exactamente 180° ó 200^{G} si son dos, 120° si son tres, etc.

11ª La graduación de los círculos debe ser exacta.

12ª La división de los verniers ó el paso de los tornillos micrométricos, según el caso, deben ser exactos.

13ª Tratándose de un instrumento de anteojo central, los ejes de rotación *(R R* y *A)* y la línea de colimación *(T T)* deben cortarse en un punto.

300. Supongamos satisfechas las condiciones expresadas y la línea de colimación dirigida exactamente al zenit. En esta posición la línea misma es el eje *Z*. Si giramos el anteojo alrededor de *R R* hasta que la lectura en el círculo vertical sea de 90°, la línea de colimación será horizontal, y girando la alidada alrededor del eje vertical *A*, dicha línea describirá el plano coordenado horizontal *X Y*. En éste puede elegirse una dirección cualquiera para la del eje *X* disponiendo en ella la línea del cero del círculo *H H*, y entonces la lectura de 90° sobre *H H* nos dará la dirección del eje *Y* y las lecturas intermedias, correspondientes á las líneas observadas, acusarán el ángulo que llamamos θ en la página 29. Las lecturas sobre el círculo vertical *V V* nos darán los valores de φ.

La tercera coordenada polar ρ puede medirse directamente, ó bien indirectamente: — *a*), por medio de la estadia para las pequeñas distancias, y — *b*) por medio de la resolución de un triángulo para las que salen del límite fijado en el Capítulo X, previa la medida de un lado y los ángulos necesarios.

Para que un instrumento pueda medir las tres coordenadas polares deberá, en consecuencia, tener:

Un círculo graduado horizontal,

Un círculo graduado vertical,

Un visador diastimométrico (1).

Si el visador sólo es apto para fijar las direcciones, pero no para medir distancias, el instrumento da las dos coordenadas

(1) Excusado parece añadir que el diastimómetro debe llenar las condiciones teóricas explicadas en el Capítulo X.

angulares, y en uno y otro caso se pueden medir los ángulos comprendidos entre los planos verticales que contienen las direcciones observadas.

Es difícil, por la vaguedad de las líneas de separación, clasificar los instrumentos, pero, para acercarnos á las denominaciones más generales, llamaremos instrumentos Universales Geodésicos á los de mayor finura de construcción y capaces de emplearse en operaciones que exijan la medida de ángulos con aproximación de 20″ ó mayor aún, y Universales topográficos á los menos exactos, más portátiles y cuya aproximación está comprendida entre 30″ y 1′.

301. Subdividiremos la especie de los Universales Topográficos en dos clases:

1ª *Teodolitos.*—Son los instrumentos que dan ángulos verticales y horizontales con precisión comprendida entre 20″ y 1′, y también los que sólo dan, con iguales límites de precisión, ángulos horizontales. Los hay de anteojo centrado y de anteojo excéntrico.

2ª *Taquímetros.*—Éstos dan los ángulos con igual aproximación que los teodolitos, tienen siempre los dos círculos y dan además la distancia del centro del instrumento al punto visado; llevan, en consecuencia, un anteojo analático. Entre los taquímetros consideraremos una variedad creada por Porro, llamada Cleps-ciclo (1) ó simplemente Cleps, que presenta varias particularidades de construcción, y lleva anteojo analítico excéntrico.

Hay, tanto en la clase de Teodolitos como en la de Taquímetros, instrumentos de anteojo central y de anteojo excéntrico.

302. *Errores de los Universales*—Por grande que sea el esmero del constructor, y delicados los medios de que disponga, jamás llegará á satisfacer por completo las condiciones teóricas de posición relativa de las partes de un instrumento que

(1) Cleps-ciclo, con círculos ocultos ó cubiertos.

señalamos poco há, y sólo le será dable encerrar las desviaciones en límites estrechos. Pero aun estos no serán permanentes, porque el uso, los transportes y el maltrato tenderán á aumentar los errores de posición originales, ó crearán los que en un principio no existieron. De aquí la conveniencia de emplear métodos de observación que produzcan la compensación de los errores instrumentales y la utilidad, ó mejor dicho, la necesidad de que la construcción sea tal que revele los errores, y la de que el constructor ponga á disposición del operador medios mecánicos para hacerlos desapareçer, ó al menos para llevarlos á un mínimum.

El procedimiento de eliminación es con mucho preferible al de correcciones, porque ahorra el tiempo en éstas invertido, y porque jamás se debe contar con la desaparición total de los errores instrumentales.

Examinaremos sucesivamente la influencia ejercida sobre la exactitud de los resultados por las alteraciones de la forma teórica, á reserva de exponer detalladamente en el 2º tomo los métodos de observación más apropiados para la eliminación de los errores en los casos que ésta se puede conseguir.

303. *Verticalidad del eje de rotación.*—Para establecer la verticalidad de un eje vimos en la página 165 que se emplea un nivel de burbuja rectificado. Un nivel montante *NN*, del tipo representado en la fig. 79, colocado sobre el eje de rotación del telescopio se utiliza para este efecto.

Supondremos, al estudiar cada error, satisfechas todas las condiciones teóricas, menos la que está en examen, para simplificar el estudio de la influencia por ésta ejercida.

Supongamos desviado el eje A de la vertical; girando la alidada alcanzará el nivel dos posiciones diametralmente opuestas, en las cuales la burbuja ocupará el centro del nivel, y otras dos posiciones perpendiculares á las anteriores, en las que será máxima la desviación.

El plano vertical que contenga al eje *A* será el ocupado por el nivel en las mayores desviaciones, y el plano vertical nor-

mal al anterior contendrá al eje del nivel en las posiciones sin desviación de la burbuja. El primer plano cortará el plano del limbo según la línea de mayor pendiente, y el segundo plano cortará el del limbo según una recta horizontal.

Si en la mayor desviación de la burbuja ésta señala n divisiones del nivel, y es α el valor angular de una de ellas, el eje formará con la vertical un ángulo: $\varepsilon = n\,\alpha$; las distancias zenitales observadas diferirán de las verdaderas y los ángulos horizontales verdaderos serán diversos de los acusados por el instrumento.

Si invertimos el anteojo y giramos la alidada una semirevolución para observar en una nueva posición del instrumento, nótese que no habremos conseguido eliminar el error de falta de verticalidad, porque el eje de la alidada no habrá variado de posición, por lo cual *será enteramente indispensable colocar verticalmente el eje de la alidada.*

Ésto se consigue, como explicamos en las páginas 165 y 166, girando la alidada hasta poner el nivel paralelo á dos tornillos nivelantes, y moviendo éstos en sentidos contrarios hasta que la burbuja ocupe el centro. En seguida se coloca la alidada perpendicularmente á la anterior posición y se observa el lugar ocupado por la burbuja. Si no es el centro, se lleva á él moviendo el tercer tornillo nivelante y se repiten las operaciones anteriores hasta conseguir que en una revolución entera la burbuja no abandone su posición central (1).

304. *Perpendicularidad del eje de la alidada respecto del círculo horizontal.*—Dados el adelanto del arte de construir instrumentos y la poca importancia que tiene sobre los resultados un error de esta clase puede asegurarse que no es necesario preocuparse por la falta de perpendicularidad entre el limbo graduado y el eje de la alidada. En efecto, para un ángulo de 4′5 entre el limbo y el plano horizontal, el error en una lectura del limbo será de 0″1.

(1) No se olvide que suponemos satisfechas las demás condiciones, particularmente la 5ª (Véase adelante el estudio de esta última).

305. *Perpendicularidad del eje de rotación del telescopio respecto del eje vertical de la alidada.*—Para reconocer si el eje $R\,R$ es horizontal se lleva la burbuja del nivel montante (que debe estar corregido como se explicó en la pág. 164) por medio de los tornillos B_1 B_2 al centro del nivel $N\,N$. Se gira la alidada un semi-círculo, y si vuelve la burbuja al centro quiere decir que, al menos en este plano, el eje $R\,R$ es perpendicular al eje A. Si la burbuja no vuelve al centro se lleva á él mitad por medio del movimiento de los tornillos nivelantes paralelos al eje $R\,R$, y mitad subiendo ó bajando el cojinete de apoyo del eje horizontal. Si la operación se ha hecho bien, volviendo á la primera posición debe la burbuja ocupar el centro.

Se dispone en seguida el eje $R\,R$ en un plano perpendicular al que ocupó en la operación anterior y se lleva la burbuja al centro por medio del tornillo nivelante B_3. Se repite la inversión si necesario fuere y la corrección hasta que la burbuja ocupe constantemente el centro.

La figura 194 hace comprender que el defecto de horizontalidad del eje de rotación del telescopio se elimina por medio de la doble observación, esto es, girando el instrumento entero y luego el anteojo hasta volver á visar el objeto O.

En efecto, si $A\,B$ es el círculo horizontal y $R\,R$ el eje de rotación inclinado respecto del plano $A\,B$ un ángulo φ, al visar el objeto O el ángulo leído en el círculo azimutal será $o\,a'$, en vez del $o\,a$ que se leería si el círculo vertical realmente describiera el plano $Z\,a$. Girado el instrumento y vuelto el telescopio hacia O, el eje ocupará la posición $R'\,R'$, el plano descrito por la línea de colimación (normal como es al eje $R\,R$) será $Z''\,a''$, y la lectura azimutal será $o\,a''$. Es evidente por la igualdad de los ángulos $Z\,C\,Z'$ y $Z\,C\,Z''$ que los arcos $a\,a'$ y $a\,a''$ serán iguales y por lo mismo el promedio:

$$\frac{o\,a' + o\,a''}{2} = o\,a,$$

será la lectura correspondiente al caso de un eje verdaderamente horizontal.

Este error es, pues, de los que se eliminan por la doble observación.

El error en el ángulo vertical no queda eliminado, pero es bastante pequeño para no tener que llevarse en cuenta en las operaciones topográficas.

306. *Perpendicularidad de la línea de colimación respecto del eje de rotación del telescopio.*—Sea (fig. 195) $R\,R'$ la proyección horizontal del eje de rotación, $P\,C\,P'$ la proyección horizontal de la perpendicular al eje mencionado y $C\,N$ la línea de colimación que forma un pequeño ángulo φ con la perpendicular. En la posición correcta la línea describe al girar el anteojo sobre el eje $R\,R'$ un plano vertical $P\,P'$, pero en la posición desviada describirá una doble superficie cónica cuyo eje es $R\,R'$, y cuyas generatrices son $N\,C$ y $N'\,C$. Si invertimos el anteojo cambiando el eje de modo que el punto R' venga á R y el R al R', la línea de colimación ocupará la posición $N_1\,N_2$ simétrica de $N\,N'$ y el ángulo φ de P hacia la derecha se habrá dispuesto de P hacia la izquierda. De esto se infiere que *la doble observación hecha invirtiendo las extremidad del eje horizontal eliminará el error de colimación de la línea de fe* (1).

Para investigar si un instrumento está exento del error que venimos analizando, se dirige el anteojo hacia una señal lejana y bien definida, cortando un punto de ella por el crucero de la retícula. Sin tocar el círculo horizontal se invierte el anteojo cambiando los muñones del eje de un apoyo al otro, y por medio del solo movimiento vertical del telescopio se vuelve á visar la señal. Si el punto visado de ésta cae nuevamente en el crucero de los hilos, la línea de colimación es normal al eje, pero si no sucede así se corrige la mitad del

(1) Para los ángulos verticales el error es despreciable en las operaciones topográficas siempre que, como sucede con un instrumento bien construído, sea ϕ muy pequeño.

desalojamiento total (puesto que $\varphi = \frac{N\,C\,N_1}{2}$) por medio de los tornillos de la retícula, y la otra mitad por medio del movimiento azimutal del instrumento. Será conveniente repetir la operación hasta asegurarse de que el error no es perceptible, pues en la primera no es probable lograr producir exactamente la mitad del desalojamiento.

307. *Paralelismo entre el eje del nivel y el de rotación del anteojo. Rectificación del nivel.*—Esta condición que hemos puesto después de las relativas á las posiciones de las líneas principales del instrumento mismo, en el orden de rectificación debe ser previa, y antes de proceder al examen de la horizontalidad del eje $R\,R$ es preciso inquirir si los apoyos del nivel están en una línea paralela al eje del nivel mismo.

Para ello se coloca éste sobre el eje de rotación, como se ve en la figura 79, y se lleva la burbuja al centro por medio del movimiento en sentidos contrarios de dos tornillos nivelantes, á los cuales deberá ser paralelo el nivel montante. Se invierte éste, y si la burbuja vuelve al centro será prueba de que existe el paralelismo deseado. En caso contrario se lleva al centro referido, mitad por el movimiento del tornillo del nivel a (figura 79), y mitad por medio de los nivelantes. Se repite la operación hasta conseguir que la burbuja no cambie de posición al invertirla.

308. *Error de índice del círculo vertical.*—Si un círculo vertical está graduado para dar distancias zenitales debe señalar 0° cuando el anteojo es vertical, y si está graduado para ángulos de altura ó depresión, el cero debe corresponder á la posición horizontal del telescopio. Supongamos el primer caso (la demostración es idéntica para ambos).

Sea $O\,A\,N$ el círculo vertical (fig. 196), y $C\,Z$ la línea vertical que debía ocupar el cero de la graduación. Supongamos que en vez de ésta el cero ocupe la línea $C\,O$ desviada de $C\,Z$ el ángulo ε. La lectura al dirigir la visual $A\,A$, será:

$$O\,A = z_1 = z + \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en lugar de ser z.

Girando el instrumento alrededor del eje vertical NZ y volviendo á dirigir el anteojo á la señal tendremos (fig. 197):

$$OA' = z_2 = z - \epsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

para la lectura hecha en el círculo.

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

luego *la distancia zenital correcta es la semisuma de las lecturas obtenidas en las dos posiciones del círculo.*

Este error es de los que se eliminan por la doble observación.

Si se quiere conocer el error de índice tendrá por expresión:

$$\epsilon = \frac{z_1 - z_2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

De igual manera se demuestra que, si son a_1 y a_2 los ángulos de altura observados en las dos posiciones del círculo, el ángulo de altura correcto es:

$$a = \frac{a_1 - a_2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

309. *Perpendicularidad del círculo vertical respecto del eje horizontal.*—Son aplicables á esta condición las explicaciones hechas sobre la perpendicularidad del círculo azimutal respecto del eje vertical.

El constructor encierra el error de que hablamos en límites que hacen inútil considerarlo.

310. *Posición exacta de la retícula.*—Nos referimos, no á la posición de la línea de colimación perpendicular al eje horizontal, sino á la relativa posición de la retícula y: *a*) del ocular; *b*) del objetivo y *c*) de los ejes óptico y de figura del telescopio.

Al ocuparnos del telescopio estudiamos detalladamente esta cuestión, y remitimos al lector á las página 133 á 139 y 152 á 153.

Notemos que al producir el desalojamiento de la retícula

para satisfacer á la 4ª condición (número 299) puede desalojarse la línea de colimación respecto al eje de desalojamiento del tubo de afocamiento del anteojo, y con ello traer un error más grave todavía, el de variabilidad del error mismo de colimación.

En los instrumentos geodésicos usados siempre para observar á largas distancias no hay lugar á este temor, pero no así en los topográficos destinados á observar distancias muy variables, que obligan á grandes desalojamientos del tubo de afocamiento.

Errores provenidos de construcción imperfecta bajo este aspecto, no son generalmente despreciables. (1)

Una vez más se impone la conveniencia de la doble observación.

311. *Error de excentricidad.*—En el número 294 nos ocupamos ya extensamente de esta cuestión. Allí vimos que el uso de dos índices diametralmente opuestos hace desaparecer el error de excentricidad, y sólo añadiremos que cada índice se distingue del otro por medio de una letra (*A* ó *B*) ó de un número romano. Así, por ejemplo, los datos se inscriben:

Vernier *A* :... 10°20′
„ *B* .... 180°21′

312. *Posición asimétrica de los índices* (verniers ó microscopios) *respecto del eje de la alidada.*—En los instrumentos topográficos se emplean dos índices, y sólo en los geodésicos se suelen usar tres ó cuatro.

Si los ceros de los índices no están en las extremidades de un diámetro, las lecturas diferirán entre sí una cantidad constante c; pero como un índice está desviado, la cantidad $\pm \frac{1}{2}$ C y el otro la $\mp \frac{1}{2}$ C, se comprende que el término medio aritmético de las dos lecturas, hará desaparecer el error.

Para obtener un resultado exento del error de mala colocación de los índices, se tomará el promedio de sus lecturas.

(1) Tinter—Rivista di Topografia ó Catasto. Vol. II-8.

Lo mismo puede decirse de los índices del círculo vertical.

313. *Exactitud de las graduaciones.*—Nos remitimos para esta cuestión á la pág. 379.

314. *Graduación de los verniers y paso de los tornillos micrométricos.*—(Véanse los números 291 y 293.)

315. *Intersección de los ejes vertical y horizontal y de la línea de colimación.*—Puesto que el eje vertical de la alidada determina uno de los tres coordenados, puesto que el horizontal de la rotación del telescopio fija otro de estos ejes y puesto que la línea de colimación colocada horizontalmente y por consecuencia normalmente á los ejes de rotación referidos, establece el tercero de los ejes coordenados, deberán las tres rectas que forman materialmente el sistema, concurrir en un solo punto, origen de las coordenadas polares que mide el instrumento.

Pero algunas veces la posición central del telescopio presenta inconvenientes, como por ejemplo, cuando el instrumento se destina á dirigir visuales hacia puntos muy cercanos al zenit, en cuyo caso no puede acercarse el ojo al ocular, ó como cuando se visan puntos tan bajos con relación al plano horizontal, que el limbo del instrumento viene á cubrir el objetivo, y queda además el ocular en posición tal, que el observador se halla molesto para visar. Por otra parte, la necesidad de poder girar el anteojo sobre el perno horizontal, obliga á dar cierta altura á los apoyos de dicho perno, con mengua de su estabilidad, la cual se conserva disponiendo apoyos menos altos y colocando el anteojo fuera de ellos para que pueda girar libremente.

316. *Universales de anteojo excéntrico.*—La excentricidad del anteojo no carece de inconvenientes y en general son preferidos los instrumentos de anteojo central. La fig. 198 representa esquemáticamente en proyección vertical un teodolito de Combes, de anteojo excéntrico, y la 199, á escala algo diversa, representa el mismo instrumento en proyección horizontal.

Como se ve, el plano vertical de mira $C\,C$ no pasa por el centro A de rotación de los índices y al girar el anteojo sobre el eje de la alidada, se mantiene tanjente á un cilindro concéntrico con el eje vertical y la proyección $C\,C$ es tangente á un círculo concéntrico con el azimutal.

317. Para medir con un instrumento de este tipo el ángulo $A\,C\,B$ (fig. 200), se dirige el anteojo al punto A y se hace la lectura del índice de la alidada sobre el círculo inferior fijo; después se visa el punto B y hace la nueva lectura correspondiente á la nueva posición de la alidada. Evidentemente el arco recorrido será el **a b**.

Invirtamos el anteojo girándolo alrededor de su eje horizontal y volvamos á visar el punto A; ocupará el visador la posición **a'**, y fijo el limbo se leerá en él una cifra correspondiente á la posición **a'**. Visemos después el punto B, hagamos la lectura correspondiente á la posición **b'** y deduzcamos por la diferencia **b' — a'** el arco **a' b'**.

Para deducir el verdadero valor del ángulo $A\,C\,B$, cuya medida es el arco **m n**, tendremos:

$$m\,n = m\,a' - n\,a'$$

pero como son iguales los triángulos $A\,C\,a$ y $A\,C\,a'$ que tienen hipotenusa común é iguales los catetos $C\,a$ y $C\,a'$, tendremos:

$$m\,a' = m\,a = a\,b + b\,m$$

y en consecuencia,

$$m\,n = a\,b + b\,m - n\,a' \ldots\ldots (1)$$

Tendremos de modo análogo

$$m\,n = b\,n - b\,m$$

pero

$$bn = n\,b' = n\,a' + a'\,b'$$

y

$$m\,n = n\,a' + a'\,b - b\,m \ldots\ldots (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2)

$$m\,n = \frac{a\,b + a'\,b'}{2}$$

Esto es, que *la medida del ángulo es el promedio de las diferencias de lecturas acusadas por el índice, observando en las dos posiciones del instrumento* (directa é inversa ó con círculo á la derecha y círculo á la izquierda).

Para conocer la importancia numérica de la excentricidad del anteojo, determinemos el valor del ángulo $\varepsilon = a\,A\,C$ (fig. 200), formado por la dirección observada $a\,A$ con la verdadera $C\,A$.

Llamemos E la excentricidad $C\,a$ ó sea la distancia del eje de rotación á la línea de colimación y D la distancia $C\,A$, tendremos:

$$\tan \varepsilon = \frac{E}{D}$$

De aquí se deduce que el error es tanto menor cuanto es menor la excentricidad y mayor la distancia del punto observado al de observación.

Por ejemplo: Si (como en el Gleps.grande) $E = 0^m07$ y suponemos

$$D = 300^m \text{ resulta } \varepsilon = 0^G01487$$

y si, con igual valor de E,

$$D = 3000^m \text{ será } \varepsilon = 0^G00158$$

Nótese que si $C\,A = C\,B$, el ángulo medido con el instrumento excéntrico es igual al $A\,C\,B$, esto es, no hay error de excentricidad del telescopio.

Descripción de las partes componentes de los Universales.

318. *Tripiés.*—Los instrumentos topográficos se instalan sobre tripiés de madera que sostienen una plataforma ó meseta donde reposan los tornillos nivelantes.

A dos tipos se pueden referir los tripiés usuales: al llamado inglés y al *de muleta.*

Los primeros tienen el aspecto representado en la fig. 201,

y como se ve consisten en tres bastones de sección circular que sostienen una placa, á la cual se articulan por medio de tornillos. Estos se aflojan para abrir las piernas del tripié y se aprietan luego que está en la posición deseada, para asegurar la inmovilidad del apoyo del instrumento.

La cabeza del tripié es generalmente de bronce y lleva un taladro central de 2 á 4^{cm} para dejar pasar la plomada que determina la proyección sobre el suelo del eje central del instrumento.

Otra forma común en los tripies ingleses es aquella en la que la sección de cada pierna es un sector de 120°, de manera que al reunir las tres se forma un grueso bastón de sección circular (véase la parte de un tripié de esta forma en la figura 232).

El tripié de muleta representado en la fig. 202 y que se ve en muchos instrumentos de los dibujados en el presente Capítulo, se ha generalizado más cada día por tener sobre el antes descrito la fundamental ventaja de proporcionar mayor estabilidad á los instrumentos que lo llevan y además por ser más ligero. (1)

Para introducir fácilmente en el suelo las puntas herradas en que terminan los pies por su parte inferior, suelen éstos llevar un pequeño estribo como el *C* (fig. 203), sobre el cual se ejerce presión con el pie hasta hacer penetrar firmemente la punta en el terreno. Las maderas más empleadas en los tripiés son el fresno y el nogal.

Una mejora introducida en los tripiés es la que consiste en hacer variable la longitud de una ó más piernas cuando la disposición del terreno así lo exige. Estos tripiés, llamados *extensibles*, son semejantes al que se ve en la fig. 204 que se comprende sin necesidad de más explicación. Para países montañosos y para trabajos subterráneos, es muy recomendable la forma que nos ocupa.

(1) Al hablar del Cleps grande describimos un tripié muy estable, modelo Salmoiraghi.

319. Sobre la cabeza del trípié se fija el instrumento por medios muy variados, de los que describiremos los más usuales.

La placa del tripié en los Trougthon tiene una rosca y en ella se atornilla una pieza de la forma que se ve en la fig. 205.

En los taladros cónicos **r r r** se asientan las puntas de los tornillos nivelantes del instrumento. Para que éste no se desprenda, se desaloja una placa delgada **b** paralelamente á la base **c** hasta que no sea posible se levanten los tornillos por la forma cónica de sus bases.

Otros medios de unión del instrumento al tripié son los representados en las figs. 206 y 207, que no necesitan explicación. La forma 206 es poco usada porque es rígida la unión del instrumento con el pie, y se opone á los movimientos de los tornillos nivelantes que tienden á levantar el instrumento dejándolo suelto cuando se hace bajar. Estos inconvenientes se evitan, en la disposición representada en la fig. 207, por la adición de un resorte en espiral.

Breithaupt ha hecho móvil la pieza de apoyo del resorte, y de este modo el centro del teodolito corresponde con la prolongación de la plomada suspendida en el extremo del tornillo (fig. 208), mientras que con las otras disposiciones no existe esa correspondencia para una posición inclinada del tripié (fig. 209).

320. *Plataformas.*—La plataforma del tripié debe ser horizontal y estar exactamente centrada sobre el punto que marca la estación. Con los aparatos comunes se llega á un resultado aproximado, desalojando progresivamente los pies; pero este modo de proceder es bromoso y poco exacto. Para evitar estos males, se han ideado plataformas articuladas que pueden, después de fijado próximamente el tripié, desalojarse horizontalmente en un pequeño espacio para facilitar la operación de centrar sobre el punto deseado.

La fig. 210 hace comprender lo que acabamos de decir.

Hay disposiciones más perfectas que dan este resultado, co-

mo es la de la fig. 211 que representa la adoptada por los Sres. Buff & Berger, y consiste en dos piezas sobrepuestas: la inferior fija al tripié é inmóvil, y la superior que puede resbalar sobre la inferior y recibe las puntas de los tornillos nivelantes. Llegada la plomada al punto deseado se inmovilizan las

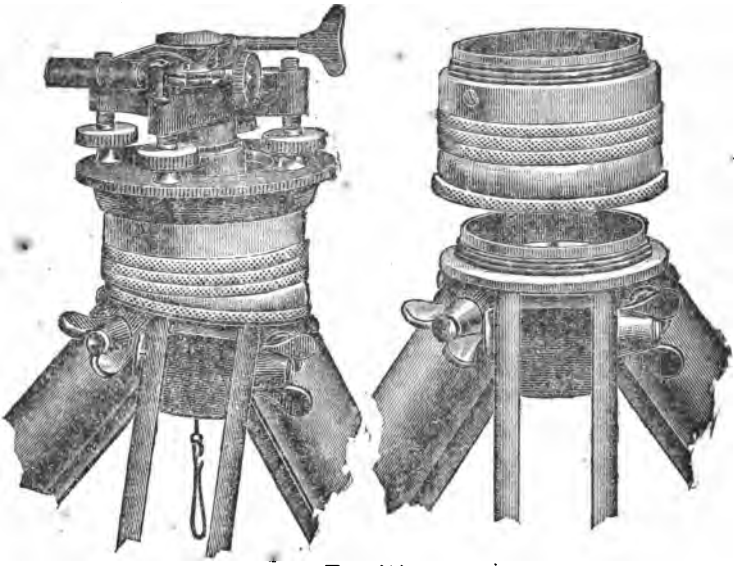


Fig. 211.

placas girando un anillo con rosca, que se ve en la figura, con una de las manijas en que se apoya la mano del operador para afirmarlo. Para operar el desalojamiento de la placa superior, se debe principiar por aflojar el resorte que fija el instrumento al tripié.

321. Otra mejora introducida en las conexiones entre instrumentos y tripiés, es la del *nivelador* (quick leveling attachment) que facilita la colocación vertical del eje del instrumento sin trabajar mucho moviendo el tripié.

Este accesorio, muy ventajoso cuando se trabaja en países montañosos ó en el interior de las minas, pero que tiene el inconveniente de disminuir un tanto la estabilidad de la base del instrumento, se ve en la fig. 212, y consiste en dos piezas

acopladas que se atornillan entre el instrumento y el tripié. Como esta pieza es independiente, sólo se coloca cuando se quiere usar por exigirlo el trabajo que se tiene entre manos, atornillándola al instrumento, y luego éste y aquella ya unidos, se fijan al tripié de la manera usual cuidando de que las dos piezas del nivelador adhieran fuertemente entre sí, desde el momento en que se haya conseguido la horizontalidad de la placa superior. Después se centra la plomada por el movimiento independiente del mecanismo centrador.

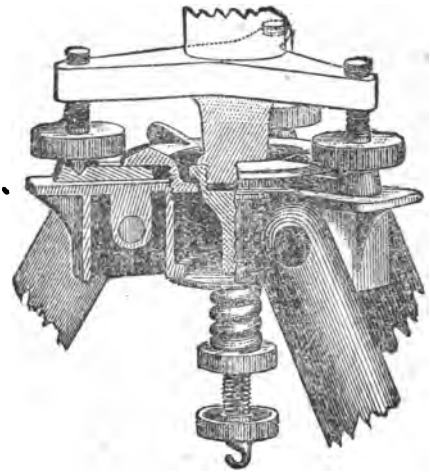


Fig. 212.

322. *Tornillos nivelantes.*—Bastando tres puntos para determinar la posición de un plano, con tres tornillos cuyas puntas sean el apoyo de un instrumento, se tendrá la base suficiente para soportar un instrumento. Esto no obstante, es general en los instrumentos americanos el uso de cuatro tornillos dispuestos simétricamente alrededor del eje vertical.

Cada una de las dos disposiciones referidas presenta sus ventajas.

Con cuatro tornillos se puede cerrar un tanto la base de apoyo, y por eso esta disposición es preferida en los instrumentos americanos portátiles, pero en los más finos sólo se

emplean tres tornillos separándolos más para dar una base de apoyo proporcionalmente amplia.

Los tornillos nivelantes son generalmente de bronce y llevan una rosca cuya finura depende de la clase del instrumento. (1) La tuerca del brazo en la que penetra el tornillo, tiene una hendedura vertical que se estrecha ó amplía para presentar al tornillo la conveniente resistencia, por medio de un pequeño tornillo **a** (fig. 213).

Si se trata de nivelar un instrumento de tres tornillos, se gira su parte fija hasta que el nivel quede paralelo á la línea que pasa por dos de los puntos de apoyo de los tornillos y se giran éstos en sentido contrario hasta llevar al centro la burbuja.

Se dispone después el nivel en dirección perpendicular á la anterior, y se lleva la burbuja al centro, moviendo solamente el tercer tornillo. Se repiten las operaciones hasta que en una rotación entera del instrumento la burbuja ocupe el centro del nivel.

Si el instrumento tiene cuatro tornillos nivelantes se empieza por afirmarlo, apretando dos de los tornillos del mismo lado y se dispone el nivel paralelamente á la diagonal del cuadrado determinado por los cuatro tornillos, girando los dos correspondientes al paralelismo con el nivel hasta lograr que la burbuja guarde la posición debida. A continuación se mueve el instrumento 90° y se ejecuta una operación análoga volviendo á la primera posición para terminar de nivelar.

323. *Eje vertical, parte fija, alidada.*—Los tornillos nivelantes pasan por los extremos de barras horizontales que convergen á una pieza vertical hueca ó ligeramente cónica, y que sirve de chumacera al eje vertical del instrumento.

La figura 214 nos da la sección vertical de la parte inferior de un teodolito de Gurley y enseña claramente la disposición del círculo azimutal y de los ejes de rotación de la *parte fija* ó base y de la alidada.

(1) Unas 30 roscas por pulgada inglesa para instrumentos de 1′:

El limbo *B* está unido al eje principal *C*, que á su vez ajusta exactamente con la espiga cónica *H* y está mantenido en su posición por la pinza de resorte *S*.

La *alidada* ó parte superior *A* soporta el pivote de una aguja imanada *N* y los apoyos del anteojo, y está unida á una pieza *K* que ajusta sobre la superficie cónica superior del eje *C*; el peso de la alidada gravita sobre la pequeña superficie de la parte final del eje para disminuir el frotamiento.

En *V V* se ven los verniers opuestos del círculo azimutal, y en *F* un tornillo de presión que une la alidada á la parte fija.

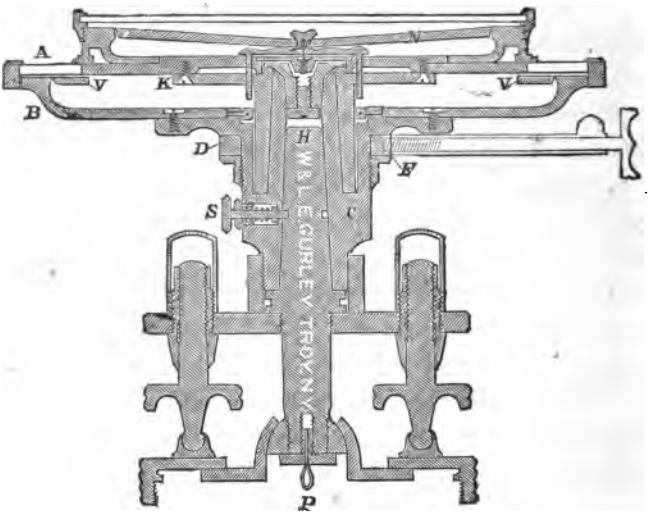


Fig. 214.

Los tornillos nivelantes tienen cubiertas que los defienden, y el instrumento tiene posibilidad de desalojarse para centrar exactamente y el movimiento para nivelar con rapidez.

En otros varios cortes de instrumentos dados en esta obra se pueden examinar disposiciones variadas de los ejes verticales, la esmerada construcción de los cuales es de la mayor importancia.

Ambos ejes deben ser exactamente concéntricos con el centro del círculo graduado y torneados de manera tan preci-

sa que el nivel más sensible colocado sobre el instrumento no acuse desalojamiento alguno cuando se mantenga inmóvil la alidada ó parte superior y se gire con la mano la inferior (1).

En la construcción del eje interior *H* se emplea bronce muy duro, y para el eje exterior un bronce especial de primera calidad. Los buenos constructores funden este eje, el círculo y la placa de los verniers en un mismo molde, para evitar cualquiera diferencia en la composición del metal.

La placa superior nunca debe ser forzada, porque esto podría producir desiguales dilataciones del metal y hacer variables las lecturas del vernier.

324. *Apoyos del telescopio.*—La forma de los apoyos varía según el constructor, que busca aquella que proporciona á la vez la mayor rigidez, el menor peso, la comodidad para girar ó invertir el telescopio, y la facilidad de leer y maniobrar los círculos. El examen de los muchos dibujos que damos en este capítulo es bastante para hacer conocer las disposiciones más convenientes.

325. *Tornillos de presión y de aproximación.*—Para inmovilizar alguna parte del instrumento se usan tornillos llamados de presión que la adhieren á otra parte del mismo que no pueda moverse. En un universal se requieren tres tornillos de presión: uno que impida la rotación de la base del instrumento; otro que fije la alidada á la base, y un tercero que evite el movimiento del telescopio alrededor del eje horizontal.

Apretados los tres tornillos no se produce movimiento alguno, y la línea de colimación queda firmemente establecida en el espacio.

326. En los instrumentos de pínulas nos conformamos con mover la alidada á mano, pero en los provistos de anteojos se perdería mucho tiempo para conseguir visar exactamente, por la tosquedad de los movimientos de rotación producidos

(1) Buff y Berger, op. cit. pág. 18.

directamente con la mano. Para tener en éstos la suavidad necesaria, se recurre al empleo de tornillos tangentes á los círculos respectivos, y los cuales, al girar, impulsan suavemente la pieza ú organo que quiere desalojarse. Estos tornillos se llaman de *aproximación* y van combinados con los de *presión*, de tal suerte, que para usar aquellos se empieza por apretar el tornillo de presión correspondiente para dar un apoyo al de aproximación que, girando, hace desalojar la otra pieza en que penetra. La figura 215 representa un mecanismo muy común para producir la fijeza ó movimiento de que hablamos y explica bien la disposición del tornillo *V* que fija la pieza *C* á la alidada *N*, y la del tornillo de aproximación, cuyo paso es pequeño en proporción con la finura del instrumento. Aflojando el tornillo *V* queda libre el eje de la alidada y es posible hacerla girar á mano hasta que se tenga en el campo del telescopio y cerca de los hilos el punto por visar (1).

Entonces se cierra el tornillo de presión y se imprime al telescopio un movimiento suave girando el tornillo de aproximación.

El movimiento de aproximación del círculo azimutal respecto del perno fijo está dispuesto de otra manera. Una pieza anular unida á la parte del instrumento que nunca se desaloja (la *base* que lleva los brazos de los tornillos nivelantes), tiene un tornillo de presión normal al eje vertical y que apoya su punta, cuando se cierra, sobre un reborde ó disco del círculo azimutal.

El mecanismo representado en la figura 216 es más moderno, y consiste en una pinza provista de un apéndice que queda sujeto entre un tornillo de aproximación y un resorte antagonista.

La disposición de la figura 217 es preferible, y consiste en una pieza terminada en una horquilla, uno de cuyos brazos

(1) Se entiende que se combinan los movimientos vertical y horizontal del anteojo para lograr este fin.

lleva el tornillo de aproximación y el otro un resorte antagonista para evitar el punto muerto del tornillo.

Como se ve, la pinza en vez de abrazar el borde de un disco como las de las figuras 215 y 216, abraza el perno mismo, con lo que se disminuye el riesgo de hacer girar el círculo al apretar el tornillo de presión.

El *gradienter* que describimos en el Capítulo X no viene á ser sino una combinación de un tornillo de presión con uno de aproximación de cabeza graduada. La figura 218 representa la disposición más común de los tornillos del movimiento del eje horizontal. En *p* se ve el de presión, en *a* el de aproximación, en *H* el eje horizontal, y dentro del tubo *o* se halla el resorte antagonista.

327. *Tornillos de rectificación.*—Ya nos hemos ocupado de las disposiciones adoptadas para corregir los apoyos de los niveles y la línea de colimación; sólo nos resta describir las usadas para variar la altura de los apoyos del eje horizontal y conseguir sea perpendicular al eje vertical del instrumento.

Generalmente una de las dos chumaceras de apoyo del eje horizontal *H* es independiente del soporte mismo, y está ligado á él por medio de tres ó cuatro tornillos, figuras 219, 220 y 221. Las dos formas últimas son más complicadas que la primera, pero proporcionan mayor comodidad cuando se quiere levantar la chumacera. Se comprende fácilmente la manera de elevar ó bajar ésta girando los tornillos verticales que unen la chumacera al soporte.

Otra forma mejor es la que se ve en la figura 222 (1). Los dos tornillos *V V* de roscas contrarias apoyan en la horquilla del soporte y atraviesan un dado *d*. Si se gira éste por medio de una llave, se acercan ó se alejan, según el sentido del movimiento giratorio, los dos brazos de la horquilla y el eje se eleva ó baja. La corrección es mucho más cómoda de esta manera que cuando se tienen que mover varios tornillos antagonistas.

(1) Esta fué ideada por A. y R. Hahn, de Cassel.

328. *Microscopios lectores.*—En el Capítulo anterior dimos ya la teoría y explicamos la disposición material de estos aparatos.

Deben estar colocados en lugares fácilmente accesibles al operador y sobre puntos de la graduación bien iluminados.

Para obtener lo último se disponen reflectores de la luz difusa atmosférica, ya sean prismas, como en los Cleps, ya plaquitas blancas de vidrio despulido ó marfil.

329. *Plomadas.*—Para proyectar sobre el centro de estación el del instrumento, se usan plomadas acabadas en punta aguda, y cuyas formas son muy variadas, pero substancialmente las mismas.

Variando la altura del instrumento sobre el suelo, según se abra el tripié, debe hacerse variable la longitud del hilo que sostiene la pesa de la plomada. La figura 223 representa una de las muchas disposiciones empleadas para conseguir este objeto.

Una piececita rectangular de cuero ó madera con tres taladros, como se ve en la figura 224, desempeña el mismo papel y se construye por el ingeniero mismo con la mayor facilidad. El hilo se sostiene por frotamiento en los taladros.

330. *Construcción general.*—El desideratum en la forma de las partes de un instrumento es disminuir el peso muerto donde no sea esencial para la estabilidad del instrumento, pero sin disminuir la fuerza de las piezas que estén más expuestas á choques ó caídas. Por consiguiente, la base de los soportes verticales, la placa de los verniers y el círculo graduado, las placas de apoyo de los tornillos nivelantes, los centros y ejes, etc., se hacen especialmente rígidos por medio de nervaduras convenientemente dispuestas y de formas que den la mayor resistencia.

En vez de concluir separadamente las piezas más pequeñas y unirlas después por tornillos ó soldaduras que representan siempre puntos débiles, se deben unir en una sola fundición tantas piezas como sea posible, y emplear metales duros,

resistentes y uniformemente dilatables para que se mantengan los ajustes.

El bronce de aluminio con 90 % de cobre constituye un buen material para instrumentos; no así el aluminio con pequeñas proporciones de plata ó cobre, que es demasiado suave. El aluminio, por su poca densidad, ha tenido partidarios para ser usado en los instrumentos topográficos; pero en cambio de esa ventaja presenta inconvenientes serios.

El aluminio puro es muy rígido, pero demasiado suave; si se liga con 10 % de cobre es quebradizo, y si con 20 ó 30 % de este metal se hace frágil como vidrio.

Empleando bronce con 10 % de aluminio se gana algo, aunque poco, en punto á densidad, pero como esta liga es muy rígida, se podrían reducir un tanto los gruesos de metal, si no fuera porque haciéndolo se perdería estabilidad, es decir, estaría el instrumento expuesto á vibraciones por el viento, etc. En resumen, prácticamente se gana poco empleando el aluminio.

En instrumentos menos delicados que los universales, como por ejemplo en las brújulas, en los sextantes, en partes de los planchetes, etc., sí son de apreciarse las ventajas del aluminio sobre el bronce, y así vemos que buenos constructores, como Gurley, lo emplean en brújulas pequeñas (1).

El color de las superficies de un instrumento no es indiferente; el barniz negro que habitualmente los cubre, tiene el defecto de absorber mucho calor, y por lo mismo expone á desiguales dilataciones, principalmente de los apoyos verticales, y el color natural del bronce pulido y barnizado tiene el inconveniente de reflejar sobre el observador la luz solar. Los Sres. Buff & Berger dan á ciertas partes de sus instrumentos (cuando así se pide) una superficie áspera que da al tacto la impresión de paño fino, y que realiza la condición de tener

(1) Brújula geológica portátil, pág. 177 del Catálogo Gurley de 1895, y Brújula solar del mismo Catálogo, pág. 183.

una superficie obscura que se calienta ó enfría con lentitud. (Cloth finish.)

En resumen, la construcción de un instrumento debe ser tal que se consiga:

Sencillez de manipulación,
Ligereza combinada con resistencia,
Exactitud de graduaciones,
Poder de penetración del telescopio,
Durabilidad de los ajustes,
Estabilidad para impedir vibraciones ó movimientos irregulares.

Descripción de algunos modelos de universales.

TEODOLITOS.

331. *Teodolito reiterador con microscopios.* (Modelo Salmoiraghi). La figura 226 representa este instrumento. Se destina especialmente á trabajos de triangulación ó de trazados de precisión en los que no se emplea la estadia. Por consiguiente, no se necesita un gran anteojo (objetivo de 30^{mm} y aumento de 20 á 25) y se ha podido dar al instrumento una forma sencilla y sólida.

El círculo azimutal gira á frotamiento para la reiteración y tiene 14 centímetros de diámetro; todos los grados están numerados, y las lecturas de fracciones se hacen con microspios micrométricos que dan los 10″ ó los $0.^{g}002$.

Lleva el instrumento un nivel montante que se coloca sobre el eje horizontal, y otro fijo sobre el brazo de los verniers del círculo vertical, los cuales dan los $0.^{g}005$.

Se construye el mismo tipo de teodolito, pero con microscopios en vez de verniers en el círculo vertical y objetivo de 35^{mm} en el telescopio.

La figura hace ver el modo de unir el instrumento á la plataforma del tripié, el cual es de muleta.

332. *Teodolito repetidor con microscopios.* (Modelo Troughton & Simms).—El dibujo que damos (fig. 227) está tomado

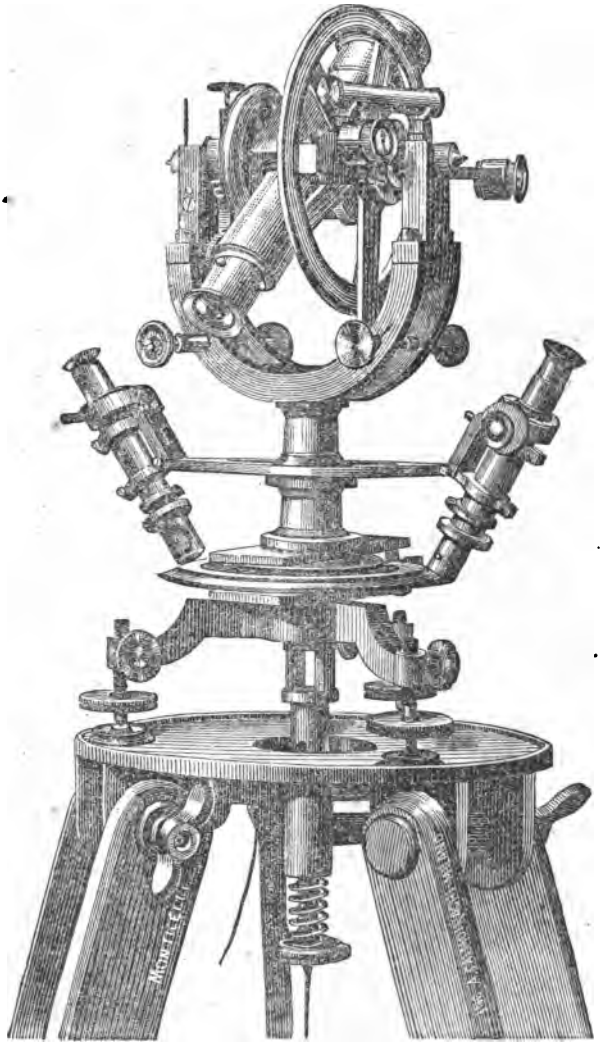


Fig. 226.

del Catálogo Bardelli. El instrumento va sostenido por trípié de forma inglesa, y la plataforma que recibe los tornillos

nivelantes es la misma que representamos en la figura 211. La pieza anular *A* se afloja, se acaba de centrar el instrumento sobre el vértice del ángulo y se aprieta después para unirla con la parte que adhiere al tripié. El tornillo *P'* fija el círculo azimutal al eje vertical general; el *P''* une el mismo círculo á la alidada, y el *P'''* paraliza el movimiento del anteojo en un plano vertical. Los tornillos *B'*, *B''* y *B'''* son los de aproximación correspondientes.

Los círculos graduados tienen un diámetro de 135^{mm} cada uno. El azimutal está cubierto y numerado en cada grado; pueden leerse con los microscopios micrométricos los 10''.

El instrumento lleva cuatro niveles: dos sobre la alidada, un montante sobre el eje horizontal y uno junto á los microscopios del círculo vertical.

El telescopio tiene una longitud de 35^{cm} y la abertura del objetivo es de 40^{mm}.

Una pequeña linterna *L* ilumina los hilos en las observaciones nocturnas. La luz pasa por una perforación del eje horizontal y se refleja hacia la retícula en un espejito dispuesto dentro del anteojo á 45° con la línea de colimación.

Lleva el instrumento, como accesorios, un ocular prismático y un helioscopio.

333. *Teodolito reiterador con microscopios micrométricos.* (Modelo Breithaupt) (1). Este teodolito es el representado en la figura 228. Siendo reiterador carece de tornillo de aproximación del movimiento general.

Los círculos graduados sólo están descubiertos en una pequeña parte frente á los microscopios micrométricos del círculo azimutal y frente á los verniers del vertical; con esta disposición se defienden las graduaciones de cualquier accidente.

Los soportes del círculo vertical tienen una forma especial

(1) Catálogo de F. W. Breithaupt & Sonn. Cassel, Alemania. Edición española de Francisco Reinoso (Guanajuato) y Guillermo Breithaupt (Alemania) 1896.

que presenta la ventaja de permitir la colocación de los micrómetros en una posición que evita reciban choques.

Hacia el medio de los soportes se encuentra un nivel esfé-

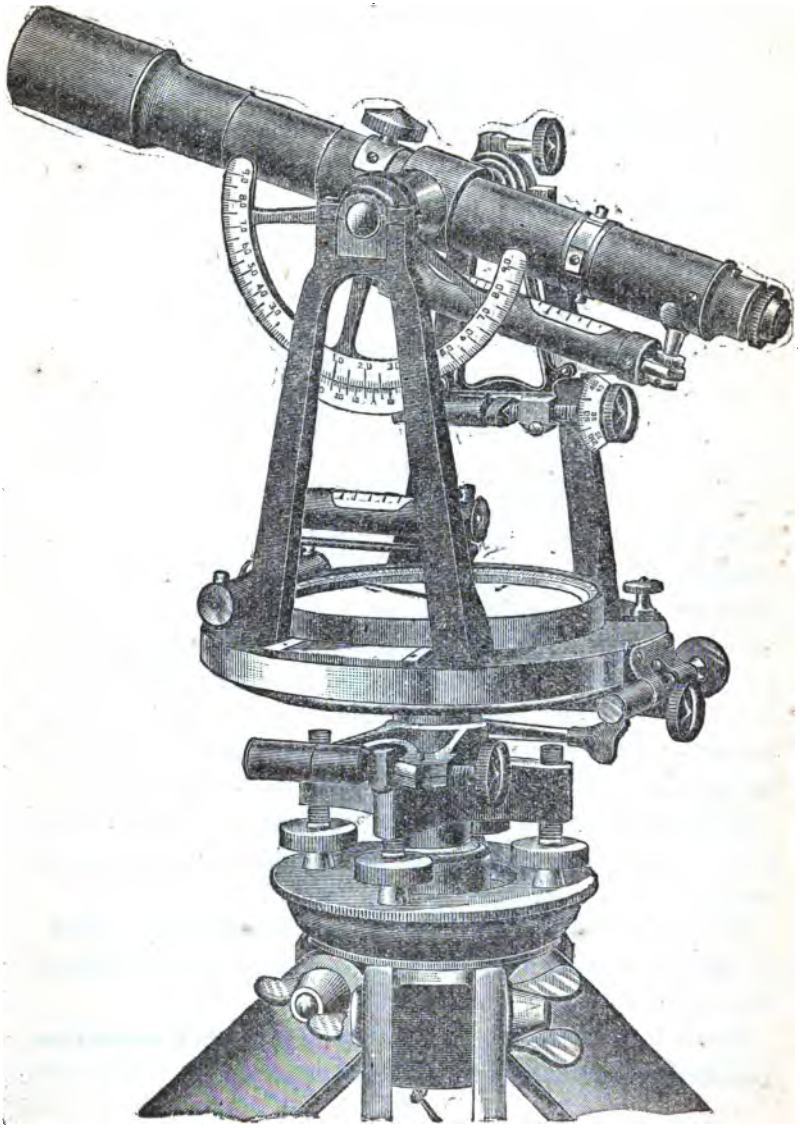


Fig. 229.

rico poco sensible, para disponer el círculo azimutal en posición próxima á la horizontal. Para la nivelación exacta se dispone de un nivel montante. Otro nivel paralelo al círculo vertical sirve para disponer horizontalmente la línea de los ceros de los verniers.

Este teodolito se construye de cinco tamaños diferentes. Los correspondientes á los clasificados como topográficos son (I y II de Breithaupt):

Diámetro del circuito horizontal.....	15cm	17.cm 5
Valor de una división del limbo.....	10′	10′
Valor de una división del micrómetro.	10″	5″
Diámetro del círculo vertical.....	12cm	14cm
Aumento del anteojo...	22	30

El círculo vertical da distancias zenitales.

334. *Teodolito repetidor de verniers* (Modelo Buff y Berger). Este instrumento (figura 229) (1) tiene cuatro tornillos nivelantes, los mecanismos para centrar y nivelar que ya describimos, y lleva tornillos de presión y aproximación para el movimiento general. El círculo horizontal graduado tiene un diámetro de 6¼ pulgadas inglesas y está cubierto, viéndose sólo dos tramos de graduación bajo unas cubiertas de vidrio, en los dos lugares de los verniers, cuya aproximación es de 1′, de 30″ ó de 20″. Las graduaciones son como las representadas en la figura 178. Entre los soportes del eje horizontal va una aguja magnética de 4½ pulgadas de longitud.

El telescopio no invierte los objetos, aumenta 24 diámetros y tiene excelentes condiciones de claridad, acromatismo y campo.

El semicírculo vertical tiene 5 pulgadas de diámetro, y puede apreciarse en él hasta un minuto con ayuda del vernier simétrico que se ve en un soporte.

Lleva dos niveles con los tornillos de corrección necesarios y el *gradienter* que describimos en el Capítulo IX.

(1) Engineers' and Surveyors' Transit núm. 1 b.

El instrumento pesa 14½ libras, y su tripié 7½.

Se construye también por los mismos fabricantes este tipo de teodolito con círculo vertical completo. (Núm. 1 c., estilo *o.)*

El teodolito Gurley, representado en la página 176, es semejante al que venimos describiendo.

335. *Teodolito ligero para montaña, minas y reconocimientos.* (Modelo Buff & Berger) (1). La figura 230 representa un teodolito semejante al que acabamos de describir, pero de menores dimensiones.

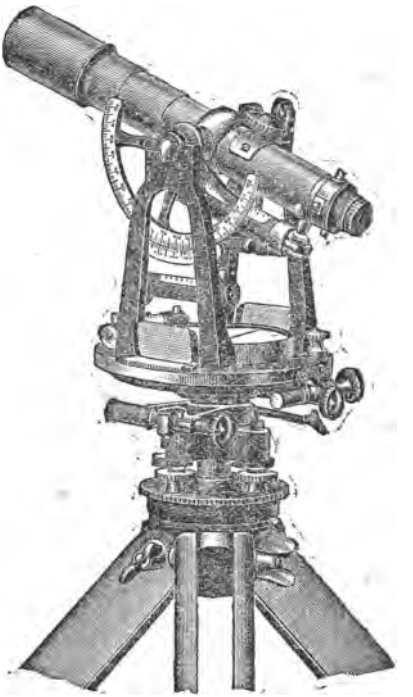


FIG. 230.

El limbo horizontal tiene 4 pulgadas de diámetro, los verniers leen 1′, la aguja magnética tiene 2½ pulgadas, el arco

(1) Mountain, mining and reconoissance transit.

vertical un diámetro de 4, y el telescopio astronómico una potencia de 15 á 18 diámetros.

El instrumento pesa solamente 5 libras, y 5 el tripié. Es conveniente usar un tripié algo más pesado, porque se gana en estabilidad, aun cuando se transporte un peso algo mayor.

TAQUÍMETROS.

336. *Taquímetro de microscopios micrométricos.* (Modelo Salmoiraghi.) Este instrumento (figura 231) tiene un círculo azimutal E repetidor, y dos microscopios micrométricos M y M_1 que permiten apreciar hasta 10″ ó 0^G002, según el sistema de graduación. El telescopio es más grande que el del teodolito reiterador (párrafo 331), pues tiene una longitud de 35^{cm} y un objetivo de 45^{mm} de abertura; es analático y está provisto de un micrómetro distanciómetro y de un ocular móvil o, que se desaloja por medio del tornillo W.

El soporte del eje horizontal tiene la forma de U, como el del modelo Breithaupt ya descrito, y lleva dos niveles L y l'', y una lámpara L_1. El tripié es de forma inglesa.

337. *Taquímetro de verniers* (forma inglesa, modelo Salmoiraghi). En su conjunto este instrumento (figura 232) difiere poco del teodolito común de Troughton & Simms. Los círculos tienen 16^{cm} de diámetro y se aprecian 10″ si la división es sexagesimal, y $0.^G005$ si es centesimal. La retícula tiene cinco hilos horizontales correspondiendo á las combinaciones de ángulos diastimométricos de $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{50}$ el ocular o se mueve girando el tornillo W. Lleva el instrumento tres niveles, una lámpara L_1 y tripié inglés.

338. *Taquímetros de verniers.*—En la fábrica de instrumentos establecida en Milán por Porro en 1864, y actualmente poseída y dirigida por el Ingeniero Salmoiraghi, se construyen tres especies de taquímetros de verniers que se distinguen con los siguientes nombres:

A) *Taquímetro normal*, llamado también taquímetro grande ó de primera magnitud.

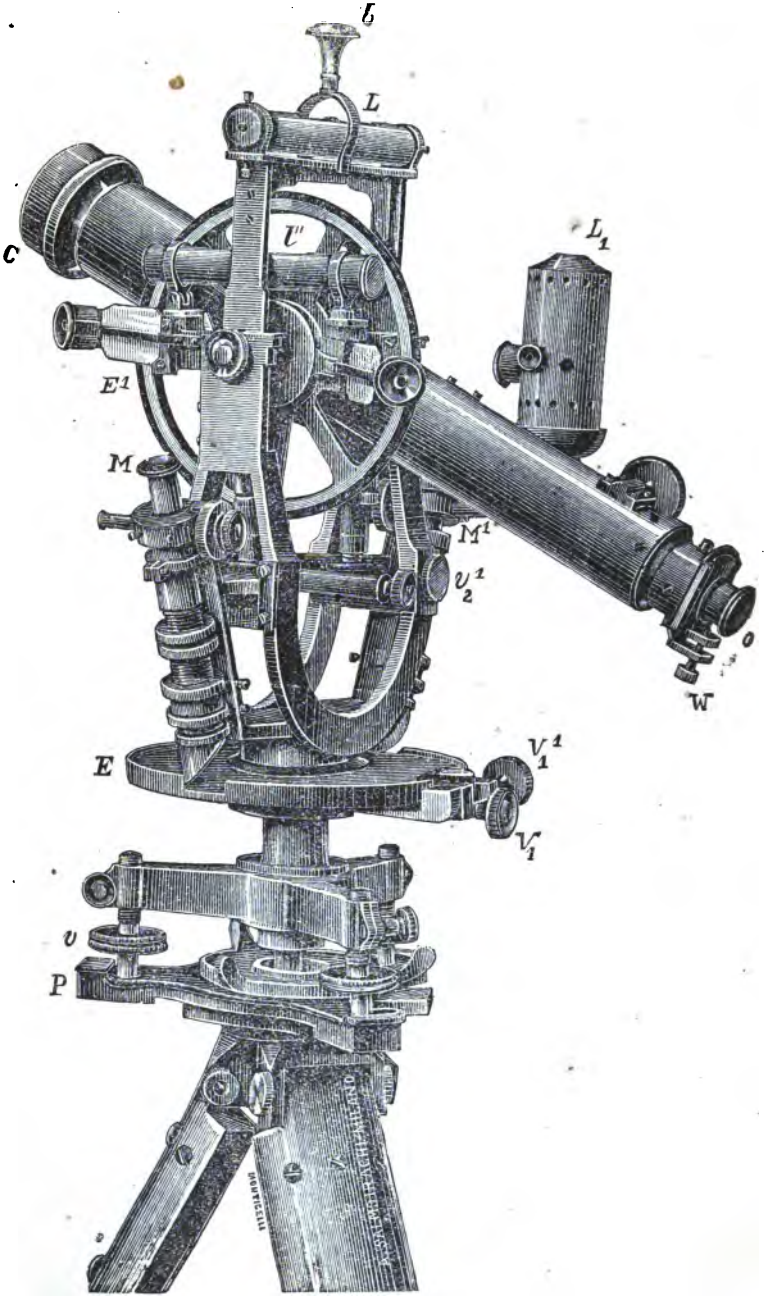


FIG. 231.

B) *Taquímetro mediano* ó de segunda magnitud, y

C) *Taquímetro pequeño* ó de tercera magnitud, que más frecuentemente se designa con el nombre de *Taquímetro Soldati*, porque fué ideado por el distinguido Ingeniero Vincenzo Soldati.

Describiremos sucesivamente estos instrumentos:

339. *Taquímetro normal* (fig. 233). Los círculos tienen un diámetro de 17^{cm} y están graduados según el sistema centesimal. La numeración va de izquierda á derecha, esto es, en el sentido que se mueven las manecillas de un relox, y cada grado está dividido en cuatro partes.

Los verniers son dos para cada círculo, y 24 divisiones del limbo corresponden á 25 del vernier, de manera que se aprecia el $0.^{c}01 = 32''4$. Los verniers del círculo vertical son fijos y el círculo es el que se mueve arrastrado por el anteojo. Para las lecturas se usan microscopios compuestos, de 8 diámetros de potencia y cuyo ocular puede acercarse ó alejarse para acomodarlo á la vista del observador. Pequeños reflectores *m* iluminan las graduaciones.

Un declinatorio magnético *M* (representado en la figura 93 según una sección á lo largo de la aguja y en la 94 normalmente á la 93) está fijado á la superficie inferior del círculo azimutal y merced á él se orienta la graduación del instrumento.

Esta disposición, característica de los instrumentos que venimos estudiando y de los Cleps que examinaremos dentro de poco, permite orientar según el meridiano magnético con mayor precisión que la dada por las brújulas comunes.

Girado el instrumento de manera que el declinatorio se disponga próximamente en dirección del meridiano magnético del lugar, con el diafragma dirigido al Norte se verá oscilar la punta de la aguja á los lados de la línea central (figura 94). Llegada aquella al reposo, si su punta no cubre dicha línea media, se girará suavemente todo el instrumento hasta lograr se realice la sobreposición.

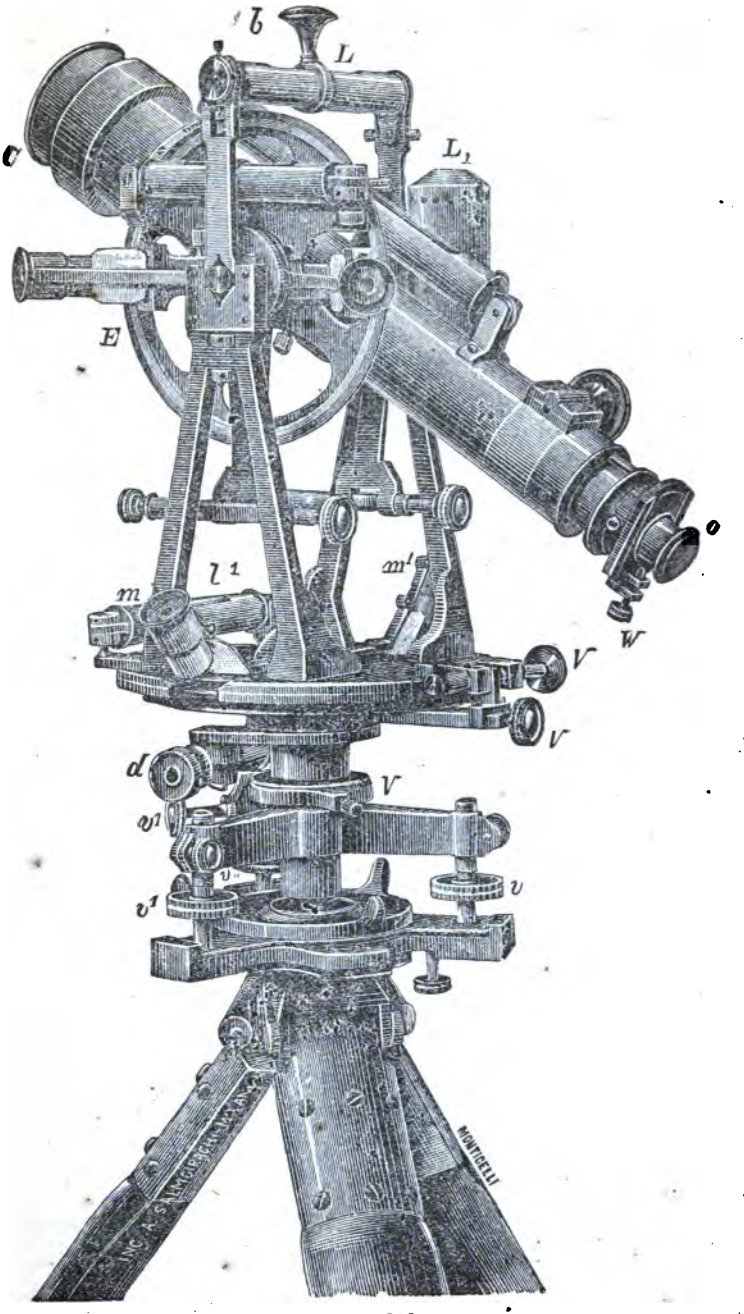


FIG. 282.

La figura 234 representa esquemáticamente el instrumento. La flecha $N S$ representa el eje de la aguja del declinatorio y $L L$ la traza del plano de colimación (1).

El telescopio es analático, igual al representado en la figura 154 (párrafo 230), y tiene un aumento de cerca de 30 veces. Para poderlo girar 200^{g} alrededor de su eje horizontal no está montado simétricamente, sino con el ocular más cerca del eje que el objetivo.

Una pieza s impide al eje horizontal salirse de sus chumaceras. Los tornillos x x son los de rectificación del último eje mencionado.

Sobre la placa de la alidada se encuentran dos niveles cilíndricos L' perpendiculares entre sí y un tercero d unido al anteojo y paralelo á la línea de colimación.

Cualquiera de los niveles de la alidada ó el del anteojo puede servir para poner vertical el eje del instrumento, y parece por lo tanto superfluo el uso de dos niveles en éste y los otros instrumentos análogos descritos; pero debe observarse que, rectificados ambos niveles, es más rápido el llevar las burbujas á sus centros moviendo los tornillos nivelantes V_1 V_2 V_3, que hacer la operación con un solo nivel, girar el instrumento, volver á la posición primera, etc. La manera de rectificar los niveles se ha explicado ya en varios lugares de este libro, y es inútil repetirla.

Respecto á exactitud de las lecturas angulares y de las diastimométricas hechas con este taquímetro nos remitimos á los capítulos correspondientes, en los cuales estudiamos los círculos y el anteojo que ahora nos ocupan.

340. *Taquímetro mediano* (figura 235). El examen de la figura es bastante para hacer comprender las modificaciones de forma del teodolito normal para llegar á la del mediano, que sólo tiene un nivel en la alidada y otro en el anteojo, y carece de tornillo de aproximación del movimiento general.

(1) Nos referimos á los párrafos 159 y 160, en los que el lector encontrará detallamente estudiada esta cuestión.

Con un solo microscopio *O*, que gira en una horquilla, se leen los verniers: uno del círculo vertical y otro del horizontal.

El sistema de rectificación del eje horizontal es semejante al de la figura. El declinatorio es igual al del taquímetro normal.

La aproximación en las lecturas angulares es de 0.^{g}02; el telescopio es analático, tiene un objetivo de 27^{mm} de diámetro, aumenta 20 veces y tiene una retícula micrométrica con tres hilos horizontales (párrafo 236). El telescopio puede invertirse.

341. *Taquímetro pequeño* ó *taquímetro Soldati.*—Este pequeño instrumento (fig. 236) (1) se desvía un poco de la forma de los dos anteriores.

La división es centesimal. El círculo vertical está reducido á un arco de círculo.

Por la pequeñez de la periferia las cifras que indican los

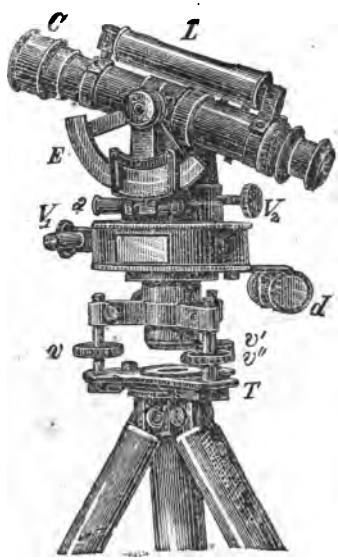


Fig. 237.

(1) De la obra de A. Tachini. Topografía moderna, 1891.

grados no son completas, por lo cual los números 5, 6, 7, etc., del arco vertical se debe entender que representan 50, 60, 70, etc., grados. Semejantemente los números 39 y 1 que se ven á los lados del cero del círculo azimutal indican 390^{g} y 10^{g}.

Los verniers aproximan á 0.^{g}05 y sólo hay uno para cada círculo.

El telescopio es analático y aumenta 15 veces.

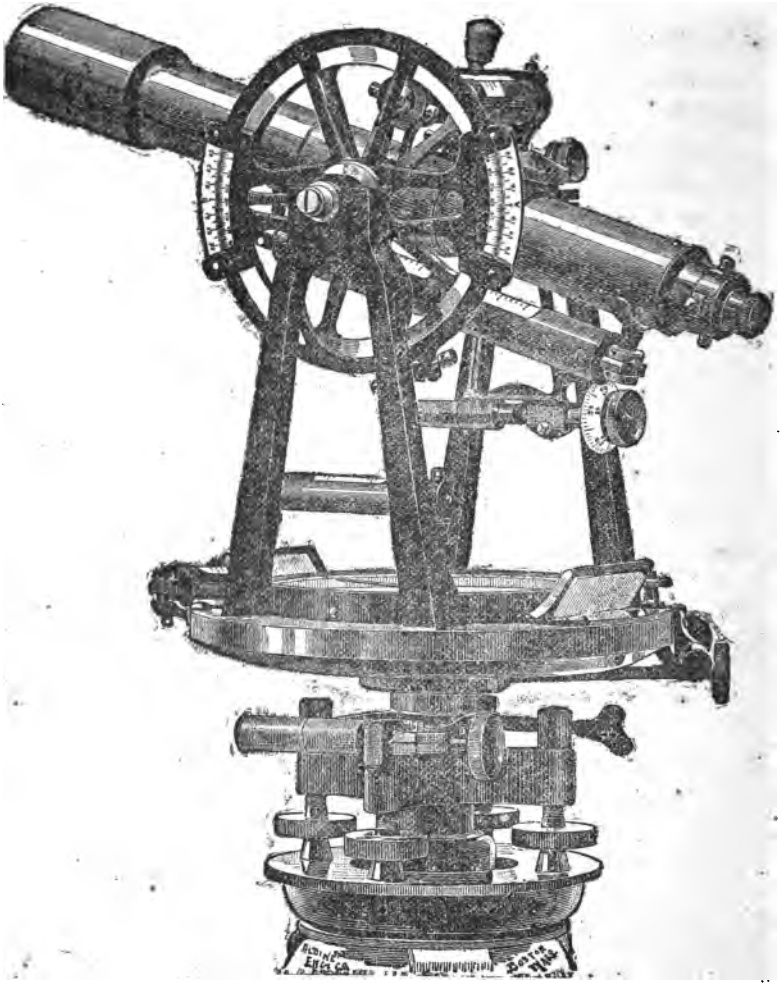


Fig. 238

La retícula es de tres hilos horizontales. El ángulo diastimométrico $\omega = 4125.''2 = 0.02$, y por tanto la relación diastimométrica es $\frac{1}{50}$.

Con este telescopio se usa de prefencia el estadal con unidad de 2 centímetros.

Aplicando á este anteojo las formulas dadas en el Capítulo X se deduce:

$$\epsilon = \pm 0.003\, A$$

Teniendo en cuenta las especiales operaciones tográficas á las que se destina este pequeño taquímetro, se puede asegurar que es un instrumento precioso, que sustituye con ventaja á los pequeños goniómetros empleados por los agrimensores, como la brújula nivelante, el pantómetro, el grafómetro, etc.

La figura 237 representa el taquímetro Soldati en perspectiva (1).

342. *Taquímetro Buff y Berger.*—La figura 238 (2) representa este instrumento cuyo círculo horizontal lleva dos verniers opuestos que leen 20″. El vertical, provisto igualmente de dos verniers, permite apreciar 1′. El telescopio es astronómico y aumenta 27 veces. Además de los hilos estadimétricos lleva *gradienter*, de manera que pueden medirse las distancias por dos medios y comparar los resultados obtenidos por uno y otro.

343. *Taquímetro Salmoiraghi con microscopios de hilos fijos.* (fig. 239.) (3)—En este instrumento deben notarse varias particularidades. Los círculos son más pequeños que los de los instrumentos descritos, pues tienen, el horizon tal 68^{mm} de diámetro y 61^{mm} el vertical, y ambos están cubiertos como se ve en el dibujo. Los microscopios azimutales tienen una gran longitud y están fijados al instrumento de manera especial. Los círculos están divididos en grados centesimales y décimos

(1) Del Catálogo Salmoiraghi.
(2) Del Catálogo Buff y Berger.
(3) Del Catálogo Salmoiraghi.

de grado y con los microscopios de estima, usando un solo hilo, se aprecia el centésimo de grado.

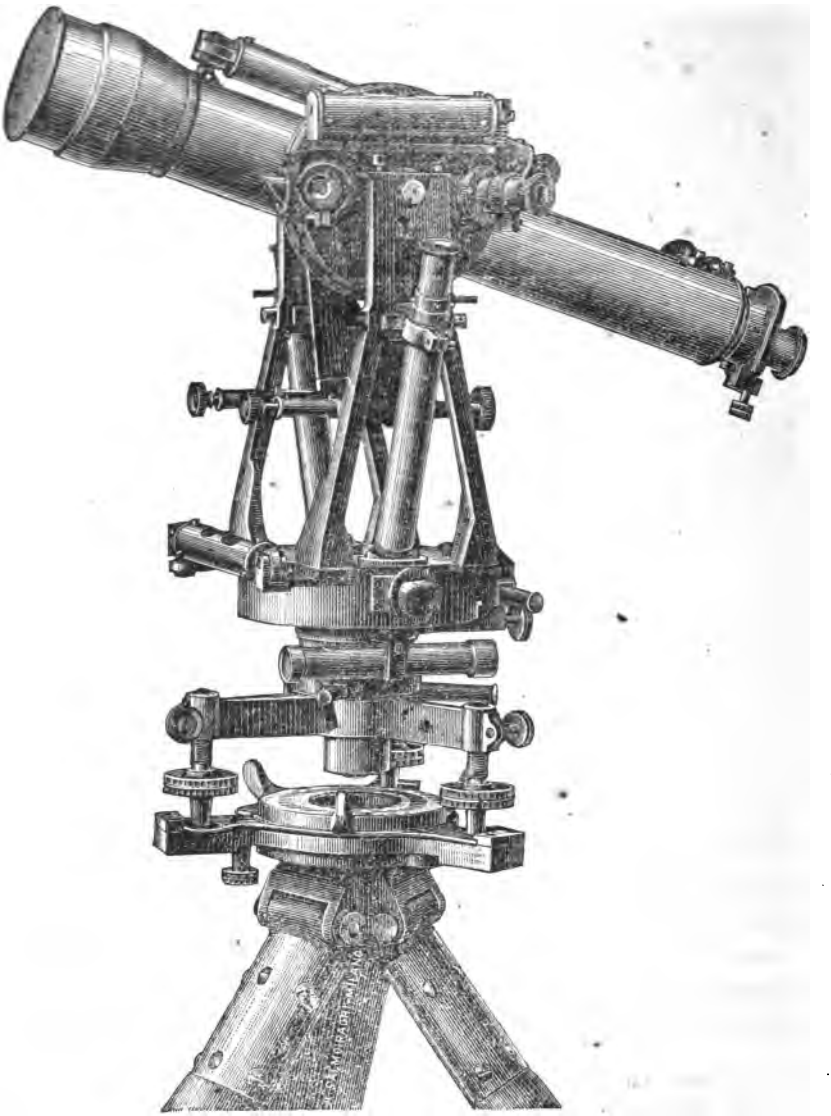


Fig. 239.

Al telescopio (de objetivo de 48^{mm}) se fija, según el caso, uno de los tres oculares que acompañan á cada instrumento y proporcionan respectivamente aumentos de 20, 28 y 40 veces, sin perder, aun con el mayor aumento, la conveniente claridad.

La retícula está compuesta de un hilo vertical y cinco horizontales dispuestos generalmente de modo que los hilos cercanos al central den:

$$\omega = \frac{1}{100}$$

y los hilos extremos den:

$$\omega = \frac{1}{50}.$$

De este mismo tipo se construye también un taquímetro más pequeño. Círculo azimutal 58^{mm}; círculo vertical 53^{mm}; objetivo 39^{mm} y aumentos de 20 y 35.

Ya vimos las ventajas de los microscopios de estima y por ellas recomendamos el taquímetro que venimos describiendo.

344. *Taquímetros Brosset.*—Este instrumento ha sido construído según dibujos del coronel Goulier por MM. Brosset frères, de Paris.

La graduación azimutal y sus dos verniers están trazados sobre superficies cilíndricas del mismo radio y cubierta aquella por un disco con un reborde cilíndrico perforado por dos ventanas rectangulares de 18^{mm}, á través de las cuales se hacen las lecturas sobre el limbo y los verniers por medio de microscopios simples de 36^{mm} de distancia focal, cuyos ejes ópticos corresponden á los ceros de los verniers, y están inclinados $22^{G}5$ sobre la superficie plana del disco, á fin de que los trazos y cifras se destaquen en negro sobre el fondo blanco obtenido por la reflexión (sobre las superficies del limbo y los verniers), de una pieza plana plateada que sirve de sostén al microscopio.

El anteojo es analático, tiene un aumento de 14.5 veces y un objetivo de 28^{mm} de diámetro. El eje de rotación está soste-

nido por un solo soporte colocado en posición excéntrica sobre el disco con reborde de que hablamos; pero dispuesto de tal manera, que la línea de colimación y el eje vertical del instrumento están contenidos en un plano vertical, esto es: que el anteojo no es excéntrico.

El círculo vertical va cubierto también, excepto en los dos lugares ocupados por los verniers correspondientes.

Lleva dos niveles: uno fijo ligado al disco que cubre el círculo vertical y cuyo radio de curvatura es bastante pequeño (4^m á 6^m), y otro móvil de radio de curvatura mucho mayor (15^m á 20^m) que se coloca al lado del anteojo y no sobre éste como sucede generalmente.

El declinatorio es del tipo Porro y va unido á la parte inferior del limbo horizontal, pero presenta algunas particularidades dignas de examen. La aguja es muy pequeña y ligera (longitud 50^{mm}, anchura 4^{mm}, espesor $0^{mm}15$), y por tanto muy sensible. Por el poco peso de la aguja y por el empleo de una chapa de rubí ó granate, se ha podido suprimir la palanca que separa ésta del pivote. Las dos puntas de la aguja imanada están encorvadas de manera que quedan más altas que el pivote y se ven proyectadas sobre un vidrio despulido, observándolas á través de un sistema óptico bastante ingenioso que consiste en una media-lente convergente de 12^{mm} de diámetro, fijada encima de la chapa y cuya distancia focal es igual á la cuarta parte de la separación de las dos puntas ($12^{mm}5$). De aquí resulta (1) que la media-lente forma cerca de la punta blanca (Sur) una imagen invertida de la punta azul situada detrás de la lente.

En sus oscilaciones la punta blanca y la imagen de la punta azul pasan muy cerca de un hilo vertical de platino tendido en un diafragma. Un sistema ocular afocable hace ver aumentados 6 ó 7 veces el hilo y las puntas y por la amplitud óptica así acrecida de las oscilaciones, se obtiene tanta preci-

(1) Véase pág. 73.

sión como usando una aguja de 300^{mm} á 350^{mm} que tuviera tanta sensibilidad como la pequeña.

Para obtener la orientación del declinatorio con relación al

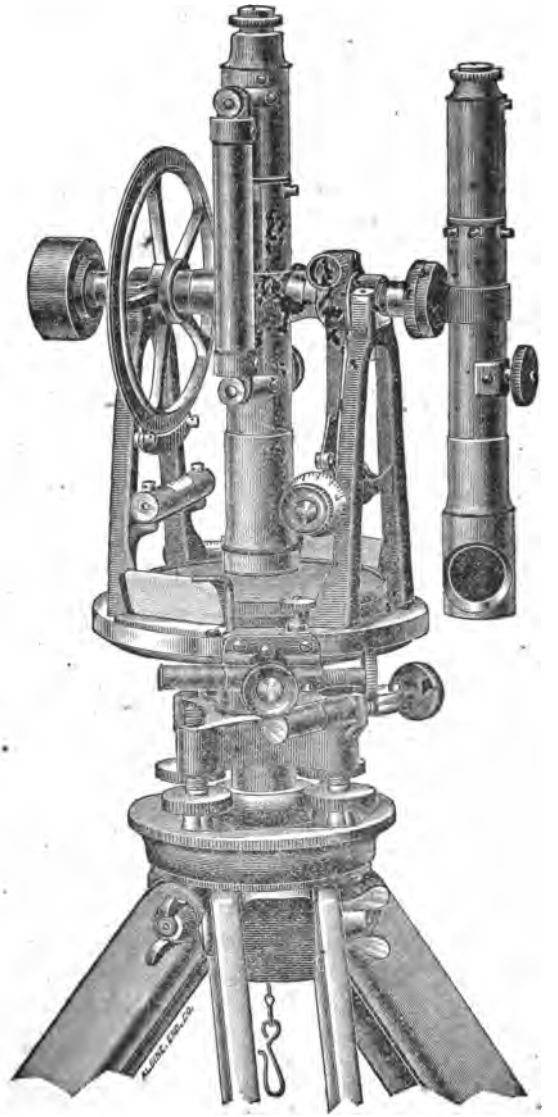


Fig. 240.

limbo, puede desalojarse el hilo vertical de platino por medio de un tornillo de rectificación. (1)

Universales de anteojo excéntrico.

TEODOLITOS.

345.—*Teodolito excéntrico.*—Son poco usados los teodolitos de este tipo; pertenece á él el de Combes, representado esquemáticamente en las figs. 198 y 199, cuya descripción no emprendemos porque este instrumento es inferior á los otros descritos.

346. *Teodolito minero con anteojo excéntrico.*—El teodolito que representamos en la fig. 240 (1), verdaderamente es de anteojo concéntrico y el telescopio excéntrico que lleva, es propiamente un accesorio móvil que se añade al teodolito para observar en direcciones cercanas á la vertical, ó en la vertical misma.

El telescopio está unido al eje horizontal, que tiene una prolongación fuera del soporte para recibir dicho anteojo. Un contrapeso en la otra extremidad del eje equilibra el del visador lateral.

Este debe tener su hilo vertical perpendicular al eje de rotación y correcta la línea de colimación.

Lo primero se verifica visando un punto bien definido y moviendo después el anteojo central lentamente. El lateral préviamente se habrá afirmado contra el eje de rotación y será arrastrado en dicho movimiento. Es claro que, si el hilo es vertical y el instrumento está bien niveledo y satisfecha la condición de perpendicularidad del eje horizontal y del eje vertical de la alidada, el hilo cortará constantemente el punto

(1) Para mayores detalles véase la obra: Goulier.—Levers topometriques, páginas 394 á 415.

(1) Complete Mining Transit de Buff & Berger:—Catálogo 1896, páginas 7 120.

visado. Si esto no se realiza, se corrige el defecto girando la retícula alrededor de su centro, para lo cual el anteojo lleva los ajustes necesarios.

La posición de la línea de colimación se verifica por el procedimiento que se explica en el párrafo 352.

LOS CLEPS.

347. El célebre Porro ideó el tipo de teodolito llamado *Teodolito-Cleps-Ciclo*, ó *Taquímetro Cleps* ó simplemente *Cleps* que no difiere sustancialmente de un teodolito topográfico de telescopio excéntrico, pero que contiene modificaciones de detalle y particularidades características tales, que casi obligan á considerarlo como un nuevo instrumento.

Porro construía cuatro tipos de Cleps. El mayor, actualmente en desuso, se destinaba á operaciones trigonométricas de primer orden; los tipos segundo y tercero se utilizaban en las operaciones comunes de la Topografía, y el cuarto exclusivamente en operaciones de agrimensura.

El Ingeniero Salmoiraghi, sucesor de Porro, ha perfeccionado el modelo de aquél, y construye actualmente tres tipos de *Cleps*, que son:

El Cleps modelo grande.

El Cleps modelo mediano, y

El Cleps modelo pequeño.

Los describiremos sucesivamente.

348. *Cleps de modelo grande.* (1)—Este instrumento está representado en proyección vertical en las figs. 241 y 242 y en perspectiva en la 243. El conjunto del mismo á primera vista no se asemeja al típico del teodolito topográfico común; pero un examen más atento nos hace ver que, excepción hecha de la excentricidad del anteojo, la diferencia entre uno y otro instrumento es más aparente que sustancial.

En efecto: en la parte B, constituída por una pieza ligada

(1) Tachini, Op. cit. pág. 298 y siguientes.

á tres brazos provistos en sus extremos de los tornillos nivelantes V, tenemos, de igual manera que en el taquímetro propiamente dicho, la llamada *parte fija* ó *base* del instrumento común á todos los congéneres. Dentro de la pieza B puede girar un perno hueco **p** (cuyo contorno está dibujado todo de negro para distinguirlo mejor de las demás piezas que lo rodean), que lleva en su parte superior el pequeño *círculo azimutal A A;* hacia la extremidad inferior lleva una parte cilíndrica más ancha *D* atravesada por el declinatorio *M*. (1)

El perno **p**, cerca de la *parte fija B*, está abrazado por la palanca *l*, que lleva un tornillo de presión *V* para inmovilizar el perno y círculo azimutal unido al mismo y un tornillo de aproximación V_1 (fig. 242) con su resorte **m**. Este tornillo se utiliza para imprimir al dicho perno los pequeños movimientos necesarios para llevar el índice de la aguja magnética á la coincidencia con la línea central de la escala respectiva.

Por construcción el diámetro $0^g 200^g$ del círculo azimutal *A A*, se encuentra dispuesto en el plano vertical que pasa por el eje de la aguja referida y por tanto orientado cuando tiene lugar la coincidencia del índice **i** (fig. 94), con la línea *N* de la escala.

Por lo tanto el tornillo micrométrico V_1 es el propio del *declinatorio*. Una vez orientado exactamente el instrumento, para evitar que durante una dada estación, girando por descuido el tornillo V_1 se altere la orientación inutilizando las observaciones hechas antes, el tornillo V_1 lléva un contratornillo V_2 que, apretado contra uno de los brazos de la horquilla de la palanca *l*, impide el movimiento de V_1. Esta innovación ha sido recientemente introducida por Salmoiraghi.

Sobre el perno **p** á su vez entra un árbol *R R* de forma cónica que gira libremente en el perno referido. En la parte superior del árbol *R R* está sólidamente asegurada la caja paralelipipédica *S S*.

(1) Véanse este perno y el declinatorio á mayor escala en la figura 95.

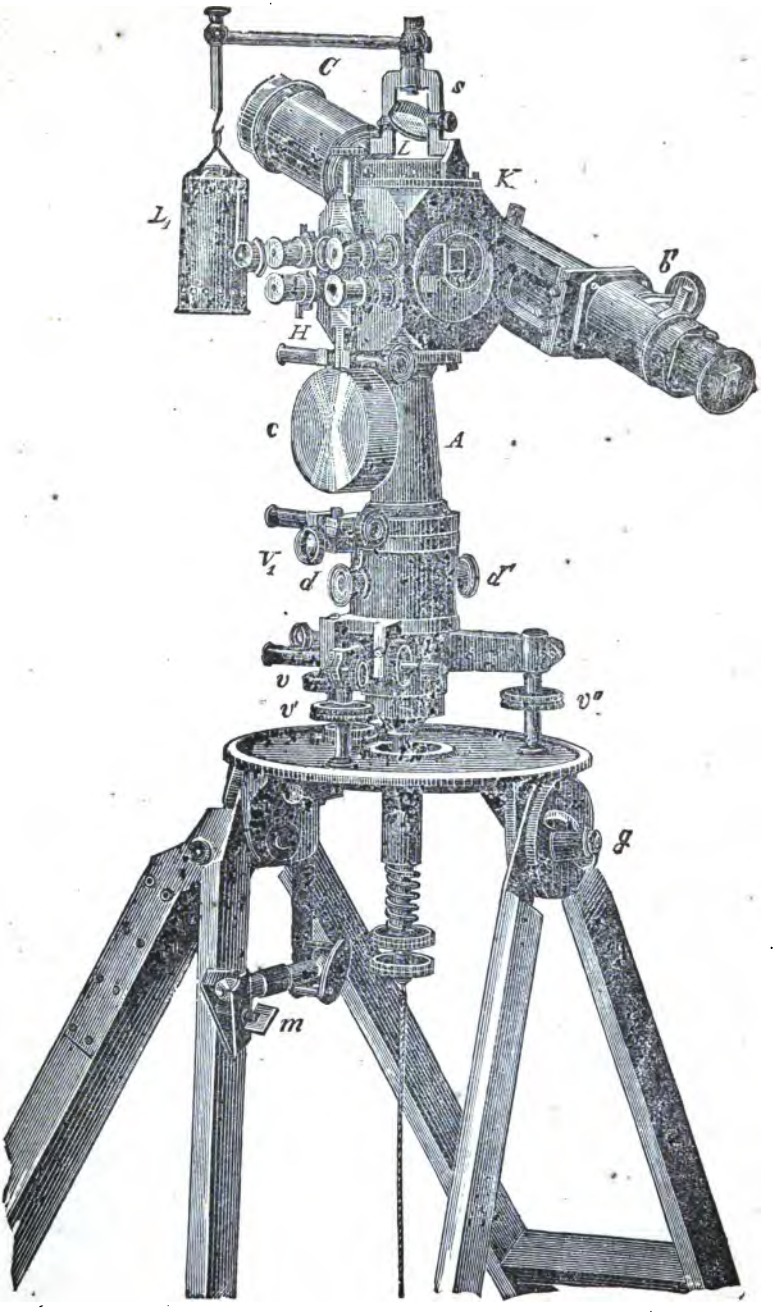


FIG. 248.

Está caja encierra los círculos azimutal ($A\,A$) y vertical (**z z**); lleva los índices microscópicos colimadores I y II para las lecturas del círculo zenital, A y B para las del azimutal; el nivel esférico L y el árbol **a** de rotación del telescopio NN.

Hablaremos adelante detalladamente de estos accesorios del instrumento; por ahora observemos que todo el conjunto de estos órganos constituye la *alidada* del Cleps.

Fijado á la base, merced al tornillo V, el perno principal **p** del instrumento, la alidada puede tomar un movimiento alrededor del mismo, que es el llamado *movimiento particular* de la alidada.

Este movimiento se detiene por medio del tornillo de presión V_3, que une la alidada al perno **p**, previamente fijado á la base del instrumento. El tornillo micromético V_4 se usa para dar pequeños movimientos á la alidada y por tanto para hacer mover los índices A y B pequeñas cantidades sobre la graduación del círculo azimutal.

Durante una estación el círculo azimutal queda inmóvil y al girar la alidada, los índices microscópicos fijos pasan ante la graduación. El círculo vertical va ligado al eje horizontal que, al moverse, arrastra el círculo centrado en el árbol del anteojo.

En conclusión, los movimientos que pueden darse al instrumento, son del todo análogos á los de los taquímetros mayores.

A uno de los extremos del árbol **a** está ligado un bastidor $T\,T$ que sostiene el telescopio. Al otro extremo una pieza maciza G' lleva un peso P destinado á equilibrar el del opuesto telescopio.

En la parte superior de l' se encuentra el tornillo de presión V_5 del movimiento del anteojo, y en la inferior el de aproximación V_6 con su resorte antagonista en **m**.

Como ya indicamos, en el Cleps se usan microscopios colimadores; los dos más altos para los ángulos verticales son de la forma común, y los dos inferiores que se usan para el círcu-

lo azimutal llevan un prisma, como se representa en la figura 244.

En el Capítulo anterior describimos detalladamente los microscopios colimadores. En el Cleps grande se colocan con cinco hilos simétricamente dispuestos, como se ven en la figura 181.

Los círculos tienen un diámetro de 64^{mm}, están divididos en 400 grados, y cada grado va numerado y subdividido en diez partes, de modo que cada una de éstas representa 0^G10.

En la figura 181 leemos en el hilo central:

directamente.....	399^G4
y por estima del intervalo.....	.06
ó sean.....	399^G46
Leyendo los cinco hilos tendríamos...	398^G80
	399. 27
	399. 46
	399. 67
	400. 09
SUMA.....	1997. 29
Promedio, lectura adoptada.....	399^G458

El diámetro de los círculos ha sido calculado como se dijo en los párrafos 286 y 287 y á ellos remitimos al lector. Recordaremos aquí que el error medio de la lectura hecha con un solo hilo es, á lo más, de un décimo del intervalo entre dos rayas: $\omega = 0^G01$, el error medio usando tres hilos: $\omega = 0^G0058$ y usando los cinco: $\omega = 0^G0029$. Así pues, empleando todos los hilos se alcanza una precisión (7″) verdaderamente sorprendente si se reflexiona en la pequeñez de los círculos y en que, por otra parte, se logra sin dificultad en las lecturas. Nótese, además, que siendo dos los microscopios lectores para cada círculo, el error medio es aun menor al tomar el promedio de cada par de resultados.

El anteojo del Cleps grande es el diastimómetro más po-

tente que se construye. Hemos descrito sus partes componentes en los párrafos 108, 116 y 231, y dado los dibujos respectivos.

Para disponer verticalmente el eje general del Cleps, éste se halla provisto de dos niveles de burbuja, uno esférico aplicado sobre la alidada, y otro cilíndrico móvil aplicable sobre el telescopio y que permite disponerlo horizontal y utilizarlo como instrumento nivelador. La sensibilidad del esférico es de $0^{g}01$ ó sea de 32″ por cada milímetro de desalojamiento de la burbuja; por consiguiente, cuando se desee hacer vertical el eje con la mayor precisión se usará del nivel más sensible del telescopio.

349. El tripié de este modelo de Cleps difiere algún tanto de los descritos. Las dos piernas **a** y **b** (fig. 245) (1) de este tripié, superiormente bifurcadas, abrazan la plataforma de bronce *PP′* montada de modo que puede girar en un eje formado por los dos pernos con tornillo de presión **p** y **p′**. Aflojadas las placas *G* y *G′* (está invisible en la figura), se pueden separar las piernas referidas y abrir la tercera **cc′**, independiente de las otras dos, y unida á la plataforma (en prolongación del eje de los pernos **p p′**) por una articulación de rodilla. Abiertas las tres piernas y dispuesta horizontalmente la plataforma *PP′*, se impide la rotación alrededor de **pp′** inmovilizando la clavija **d** con ayuda del tornillo **e**, uno de cuyos extremos entra en una tuerca y el otro se fija en **f** con un tornillo de presión.

Dispuestas las piernas de modo que apoyen las tres en el suelo, girada la plataforma hasta que proximamente se encuentre horizontal, bajada la pieza **d**, fijado el tornillo **e** por el de presión **f** y cerradas las placas *G G′* se tiene el tripié en posición.

Para disponer horizontalmente la plataforma sirve el nivel esférico *l*, cuya burbuja se centra imprimiendo á la plataforma los movimientos necesarios, sea en un sentido haciéndola

(1) De la obra citada de A. Tachini, página 231.

girar sobre **pp'**, sea en otro alargando ó acortando la pierna extensible **cc'**, formada de dos piezas susceptibles de un movimiento de deslizamiento que se produce girando el tornillo **h**.

Para asegurar el Cleps en el tripié sirve la pieza $x\,x'$, que se dispone de modo que apoye la pieza z contra la parte inferior de la plataforma, con el extremo x' atornillado en la parte central del Cleps y con el tornillo x_2 lo bastante elevado para que el resorte aplique con fuerza suficiente el instrumento contra la plataforma. Para centrar en la estación se afloja el resorte y se hace resbalar el instrumento hasta que la punta de la plomada marque el lugar conveniente.

350. *Cleps de modelo mediano* (figura 246). Substancialmen-

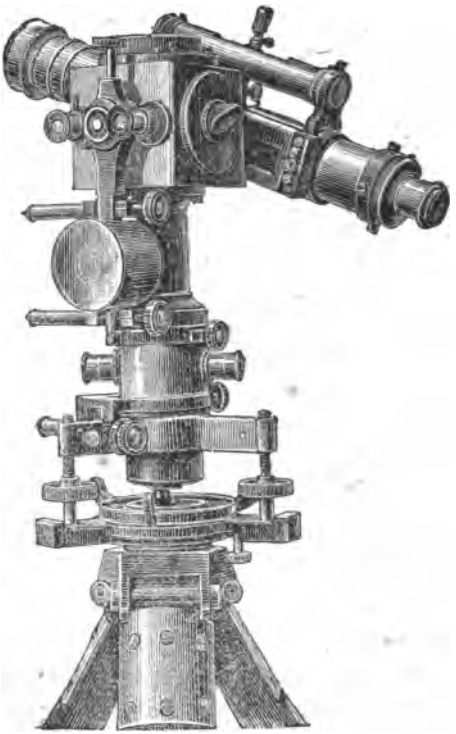


Fig. 246.

te este instrumento no difiere del de modelo grande. Se diferencia por sus menores proporciones y algunos detalles de construcción.

Los movimientos azimutal y zenital se efectúan idénticamente á los del Cleps grande, y se utilizan tornillos de presión y micrométricos, que desde luego se observan en la figura relativa.

Los círculos tienen 50^{mm} de diámero y están divididos en 4000 partes cada uno, llevando todos los grados numerados. Se lee directamente 0.^{G}1 y por estima directa con un hilo 0.^{G}01.

Sólo lleva este Cleps un microscopio con tres hilos para cada círculo. En la fig. 182 tendríamos leyendo el hilo central solamente: 129^{G}85, y los tres:

	129.^{G}32
	129.85
	130.33
Suma.....	389.50
Promedio....	129.^{G}833

El anteojo es el representado en la figura 154 y descrito en la página 313, la retícula tiene cinco hilos horizontales y el aumento es de 30 veces.

El nivel cilíndrico del anteojo, el esférico de la caja y el declinatorio son semejantes á los del Cleps grande. El tripié es generalmente de forma inglesa.

351. *Cleps de modelo pequeño.*—La fig. 247 representa este instrumento.

Los círculos tienen un diámetro de 35^{mm} y están divididos en 2000 partes cada uno, esto es: el grado está dividido en cinco partes. Todos los grados están numerados.

Sólo lleva un microscopio para la lectura de ambos círculos, dispuesto de tal manera que á la vez se presenta en su campo una parte de la graduación del círculo vertical y una parte de la del horizontal (fig. 183).

El microscopio lleva tres hilos, y por la inversión de las imágenes la graduación del círculo azimutal se ve arriba de la del vertical.

El telescopio tiene un aumento de 28 á 30 veces, y cinco hilos horizontales.. (Vease página 320.)

Lleva un nivel esférico sobre la caja y un cilíndrico en el anteojo.

Este Cleps carece del tornillo de aproximación del movi-

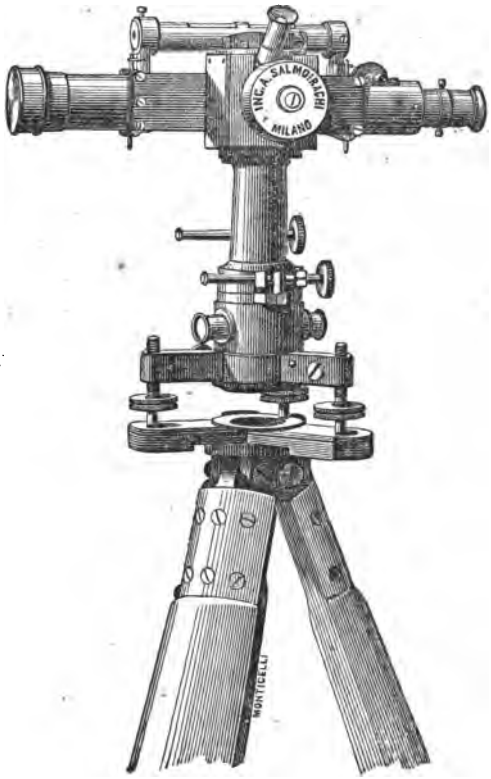


Fig. 247.

miento general y por tanto la orientación se hace á mano. Los movimientos pequeños de la alidada y vertical sí pueden hacerse con tornillos micrométricos.

352. *Verificaciones y rectificaciones de los Cleps.*—La verticalidad del eje de rotación de la alidada se verifica sirviéndose del nivel esférico ó del cilíndrico móvil, de manera análoga á la explicada para los universales en general. Una vez dispuesto el eje verticalmente por medio del nivel cilíndrico (más sensible que el esférico) se observa si en una vuelta entera del Cleps la burbuja del último se mantiene centrada, en cuyo caso este nivel estará rectificado; no verificándose dicha cicunstancia, se centrará el nivel moviendo sus tornillos especiales de rectificación hasta lograr que no se produzca desalojamiento alguno en una revolución completa.

Corregido el nivel cilíndrico y vertical el eje, el nivel esférico también debe hallarse con su burbuja centrada y éste puede ser bastante, en la mayoría de las observaciones, para determinar la buena posición del eje vertical.

La horizontalidad del eje de rotación del anteojo no puede rectificarse por el modo de conexión del árbol de rotación y la alidada, y hay que tomar como bueno el dicho del constructor, quien asegura que nunca llega el error á $0.^{c}01$. La doble observación, como vimos en el párrafo 305 elimina este error.

La perpendicularidad entre los ejes de rotación y colimación del anteojo se verifica de la manera explicada al hablar de los universales en general. La rectificación se hace con los tornillos que ligan la pieza *T* al anteojo. Dada la excentricidad del último, debe visarse un punto distante por lo menos 3000^{m}. Nótese que este sistema de rectificación presenta sobre el común en los universales, que consiste en mover la retícula, la ventaja de evitar el peligro de desalojar la línea de colimación con relación al eje mecánico, desde el momento en que en el Cleps se mueve el anteojo mismo.

El error de índice del círculo vertical existe casi siempre en los Cleps por la pequeñez de dicho círculo y por su modo de unión con el eje. Se determina ese error como explicamos en el párrafo 308, y se lleva en cuenta en las observaciones

sumándolo con su signo á cada resultado. Sabemos que se elimina por la doble observación.

Las demás condiciones se verifican como las de los taquímetros comunes, y los ángulos se miden como se explicó al hablar de los instrumentos de anteojo excéntrico.

CAPITULO XIII.

Instrumentos derivados de los universales.

BRUJULA-PLANCHETA.

353. Para levantamientos de pequeñas extensiones suelen emplearse goniómetros menos exactos pero más ligeros y menos costosos que los descritos en el Capítulo anterior; uno de estos instrumentos es la Brújula topográfica, cuyo fundamento explicamos en el Capítulo VII y del que hablamos en la página 354.

Consta esencialmente la brújula:

a.] De un eje vertical;

b.] De un círculo graduado horizontal;

c.] De una aguja magnética cuyo medio ocupa el centro del círculo;

d.] De un visador; y

e.] De un círculo vertical graduado ó *eclímetro.*

Las brújulas se construyen de dos clases: las mayores fijadas en tripiés y provistas de tornillos nivelantes y del nivel ó niveles necesarios para establecer la verticalidad del eje, son las llamadas brújulas *nivelantes*, y las menores que se sostienen por el operador mismo y se llaman *brújulas de mano.*

Entre las brújulas nivelantes las hay *concéntricas* y *excéntricas*, según que el visador tenga su línea de colimación en el

plano vertical que pasa por un diámetro de la graduación ó fuera de él.

354. En una brújula deben verificarse las siguientes condiciones:

a.] El eje de rotación del círculo dividido debe ser perfectamente vertical;

b.] El círculo graduado debe ser perpendicular al eje de rotación de la brújula, esto es: horizontal;

c.] El plano de mira debe ser vertical;

d.] El mismo plano debe ser paralelo al diámetro 0°—180°;

e.] El pivote de la aguja debe ocupar el centro del círculo graduado y una recta que una las puntas de la aguja debe pasar por el pivote central;

f.] El eje de figura de la aguja debe coincidir con su eje magnético;

g.] La aguja debe ser horizontal;

h.] La brújula no debe contener metales magnéticos y debe ser bastante sensible;

i.] Las graduaciones del círculo y eclímetro deben ser exactas;

j.] El cero del eclímetro debe corresponder á la línea del zenit ó á la horizontal, según el caso.

Se comprende que en una brújula la aguja, señalando una dirección fija (dentro de los límites explicados en el Capítulo VII), representa lo que en los universales designamos con el nombre de *parte fija ó base* y que la *alidada* está constituída por el círculo horizontal y el visador. Aquí el índice está en la parte fija y la graduación en la alidada inversamente á lo que se verifica en los universales, cuyas alidadas llevan los índices móviles con ellas.

Después del estudio hecho en el Capítulo anterior sobre las condiciones de los universales, es fácil que el lector encuentre la manera de verificar una brújula en cuanto á la verticalidad

del eje de rotación, verticalidad del plano de mira, exacta división del círculo y eclímetro y error de índice del último.

La condición *b*] es muy fácil de llenar por el constructor y no es el caso examinarla, pero pudiera hacerse disponiendo un nivel sobre la graduación misma habiendo quitado previamente el vidrio que la cubre. Repetimos que es innecesaria esta verificación.

Es igualmente fácil de satisfacer la *d*] y puede verificarse visando un punto de azimut astronómico conocido y examinando si la lectura de la aguja es igual á ese azimut más la declinación.

La excentricidad del pivote *e*] se reconoce leyendo la indicación de las dos puntas. Si el pivote ocupa el centro y la aguja es recta, las dos lecturas diferirán entre sí 180°; de otra manera si una de ellas es, por ejemplo: $a + e$, la otra será $a + 180° - e$ y la diferencia de lecturas será $= 180° - 2e$. (fig. 248.)

Así se conoce el error e que se agrega con su signo á las lecturas (en nuestro ejemplo e se debe restar del azimut leído con la punta Norte).

Si tomamos el promedio de las dos lecturas tendremos:

$$\frac{a + e + a + 180 - e}{2} = 90 + a$$

y la *lectura independiente del error de excentricidad del pivote se conocerá restando* 90° *al promedio de las lecturas de las dos puntas de la aguja.*

La horizontalidad de la aguja se observa comparando su posición con la del círculo graduado, previamente dispuesto á nivel.

Las otras condiciones: *f*] y *h*] han sido estudiadas en el Capítulo VII.

Describiremos ligeramente algunas brújulas:

355. *Brújula prismática.* (1)—Esta se usa á mano ó en tri-

(1) Llamada también Kater ó Schmalkalder.

pié y más bien se emplea para reconocimientos ó itinerarios militares; se utilizó para el levantamiento de los detalles de las cartas topográficas de Inglaterra.

La graduación está trazada, como en la brújula marina, sobre un cartón unido á la aguja magnética; la numeración parte de la punta Sur y va en sentido contrario al usual (fig. 249). La letra *N* se encuentra en la punta Sur y la *S* en la Norte.

Delante del ocular se encuentra un prisma triangular rectángulo *R*, cuya hipotenusa refleja la graduación, mientras por una porción del mismo ocular se ve la pínula objetivo. Así se juzga de la posición del plano de mira respecto al meridiano magnético, esto es: se lee el arco comprendido entre el radio que va al ocular y la punta Sur, que es igual al formado por la visual con la punta Norte de la meridiana, y es el que se lee con las brújulas comunes.

Una palanca que se mueve oprimiendo un botón B detiene las oscilaciones de la aguja y hace más violenta la observación no teniendo que esperar llegue por sí sola al reposo.

El prisma se alza ó baja para ver bien la graduación y un espejo *A* que puede correrse sobre la pínula objetivo y dirigirse hacia arriba ó hacia abajo, permite visar puntos muy altos ó muy bajos, que sin ese artificio no serían observables.

356. *Brújula de anteojo central.*—La figura 250 representa este instrumento. El círculo está dividido en medios grados y pueden apreciarse por estima 15′ ó 10′. En el limbo, además de las letras *N* y *S* que corresponden al *Norte* y *Sur*, hay una *E (Este)* y una *O (Oeste)*, pero no colocadas como les corresponde sino cambiadas (fig. 251), y la numeración es retrógrada. Se comprende la razón de este modo de proceder, examinando la figura.

En efecto, la punta norte marca en ella 46°; el visador *NS* (siempre en la línea del cero) tiene rumbo *N. E.*, y por el cambio de letras se lee el 46 entre la *N* y la *E*, esto es: 46° *N. E.* En las brújulas que tienen las letras del lado que les toca, hay

que cuidar, al escribir los rumbos, de hacer el cambio de la *E* por la *O* y vice versa.

357. *Brújula de anteojo excéntrico* (fig. 252).—Esta brújula, llamada también "Brújula cuadrada," tiene el círculo en el centro de una caja de madera y el eclímetro en un costado de la misma.

El anteojo es excéntrico, y para corregir las observaciones se acude, como dijimos al hablar de los universales excéntricos, al método de la doble observación.

FIG. 253.

Así, esta brújula como la anterior llevan los niveles necesarios.

Brújula de pínulas (1) (fig. 253).—El examen del dibujo da-

(1) Railroad pocket compass.—W. & L. E. Gurley Catalogue, pag. 169.

rá al lector clara idea de este instrumento muy portátil. El limbo graduado tiene cinco pulgadas de diámetro, y su vernier aprecia minutos. La aguja tiene tres y media pulgadas. Las pínulas pueden girar en una charnela horizontal, y acostarse sobre el vidrio para comodidad al empacar el instrumento.

358. *Brújula minera de suspensión.*—Para levantamientos en las minas donde la poca longitud de las visuales haga innecesario el empleo de un universal ó de una brújula de anteojo ó de pínulas como los descritos, se utilizan brújulas como la representada en la figura 254, en las cuales el papel del plano de mira lo desempeña un cordel tendido fuertemente entre los dos extremos de la línea de operaciones.

La brújula está soportada por una pieza *E F G*, y se dispone por sí misma horizontalmente gracias á una articulación á la Cardan. El instrumento se suspende por los ganchos *E* y *F*, y los ejes de la articulación son *C D* y *A B*. En realidad el *C D* no es necesario, bastando las suspensiones *E F* y *A B;* pero á su alrededor se gira la brújula para disponerla en el plano de la pieza *E F G* cuando se empaca.

La línea de fe ó del cero está siempre contenida en el plano vertical *C D* ó *E F*, y en consecuencia el ángulo leído con la aguja será el azimut magnético del plano que contiene la cuerda ó línea de operación.

359. *Brújulas unidas á otros instrumentos.*—Algunas escuadras graduadas, diversos niveles (1) y casi todos los teodolitos ingleses y americanos (véanse figs. 88, 229, 230 y 238) llevan una brújula central sobre la placa de los verniers. Considerando solamente la brújula y el telescopio, tales instrumentos pueden usarse como brújulas comunes; pero es de notarse que pueden, con un instrumento de este tipo, leerse los ángulos entre las direcciones concurrentes en una estación por medio de la graduación del limbo y aprovecharse la aguja para orientar oportunamente dicho limbo.

(1) Véase Capítulo XV.

En el segundo volumen estudiaremos cómo se transporta de una estación á otra la orientación, esto es: cómo se consigue que la línea del cero en una estación sea paralela á la propia línea en todas las demás estaciones de un levantamiento.

360. *Brújulas declinables.*—Se dice que una brújula es declinable cuando su construcción permite girar la graduación algunos grados, tanto en un sentido como en el contrario, para hacer que el diámetro *N S (Norte-Sur)* no sea ya paralelo al plano de mira, sino que haga con él un ángulo igual en valor y posición al de declinación de la aguja. De esta manera cuando la aguja marque 0°, el plano de mira estará en el meridiano verdadero y, en general, la aguja nos dará los azimutes astronómicos dentro del límite de aproximación que la brújula es susceptible de alcanzar.

Para desalojar la graduación se usa un piñón vertical que engrana con una cremallera en arco de círculo, y el ángulo de desalojamiento se lee en una graduación especial y concéntrica con la de la brújula. En los instrumentos americanos esta disposición es muy común.

PLANCHETA.

361. Este instrumento fué inventado en 1500 por Pretorius. (1) en Altdorf, y es todavía usado en Europa para levantamientos poco importantes. Entre nosotros casi no se usa y nos limitaremos á dedicarle unas líneas, presentando en el dibujo un ejemplar del modelo Bardelli (fig. 255).

La plancheta consiste en un restirador ó tablero de madera, de forma rectangular, colocado en posición horizontal sobre un tripié á una altura tal que sirva cómodamente como mesa de dibujo.

El restirador descansa en el tripié con el intermedio de un aparato cuya forma varía en detalles, según el autor del ins-

(1) De aquí le viene el nombre italiano: "tavoletta pretoriana."

trumento (1), pero que esencialmente consiste en una base, un eje vertical provisto de tres tornillos nivelantes, un tornillo de presión y otro de aproximación para fijar ó girar el restirador, y el mecanismo centrador análogo á los que describimos en el Capítulo precedente.

Sobre el restirador se dispone una hoja de papel de dibujo en la que se trazan las direcciones de las varias visuales dirigidas desde la estación. Dicho papel se pega, ó mejor, se fija por medio de pinzas ó por un marco ajustado al perímetro del restirador.

A la plancheta acompañan: una alidada con su respectivo visador (de pínulas ó antecjo), un nivel de burbuja, un declinatorio magnético y un pequeño aparato para disponer el punto que en el papel representa la estación sobre el que en el terreno realmente corresponde.

362. Numerosas son las clases de alidadas que se construyen. Consisten esencialmente en una regla horizontal (figura 256), una columna de metal vertical que sostiene el eje horizontal de rotación del telescopio (2) y un eclímetro.

Fijada la plancheta y nivelada, se dirige una visual por el telescopio y se traza sobre el papel la línea del borde de la regla que representará la proyección horizontal de la recta que va del observador al punto observado; dirigida en seguida la visual á otro punto y hecho el trazo correspondiente á la nueva posición, las dos líneas formarán un ángulo, que no es otro que el formado por los dos planos verticales que encierran las visuales. La plancheta es, pues, un *goniógrafo*.

Para hacer horizontal la plancheta se emplea un nivel que se dispone en su medio, y se quita al alcanzar la posición deseada. Generalmente se usa un nivel esférico poco sensible, ya que se trata de un instrumento que no puede dar resultados de una gran exactitud.

(1) Citaremos las planchetas Erêde, Breithaupt, Salmoiraghi y Kern.

(2) Prescindimos de describir la alidada de pínulas, porque dijimos ya lo bastante sobre ella en la página 106.

El objeto del declinatorio es orientar la plancheta, y comunmente consiste en una aguja de 12 á 15^{cm} encerrada dentro de una caja rectangular de madera, que lleva dos arcos de unos 30° de abertura cada uno.

Las condiciones á que debe satisfacer una alidada son las siguientes:

a) El eje de rotación del telescopio debe ser horizontal.

b) La línea de colimación debe ser perpendicular al eje de rotación.

c) Esta misma línea debe estar contenida en el plano vertical que pasa por la de fe de la regla.

Con lo dicho en este mismo Capítulo y en el anterior basta para que el Ingeniero idée la manera de verificar una alidada; únicamente harémos observar que la condición *c)* sólo es indispensable cuando quiera trazarse en el plano la meridiana magnética sirviéndose del declinatorio; pero no lo es para la medida de los ángulos comprendidos entre las direcciones cuyo valor no se altere aun cuando las líneas de colimación y de fe no sean paralelas.

La alidada que damos en la figura es la de Bardelli; son también recomendables la de Salleron, de anteojo estadimétrico; la de Kern, que puede colocarse sea sobre el restirador, sea sobre la base de éste directamente, para formar un teodolito; la de Erede, etc.

En el 2º tomo, al hablar de los levantamientos con plancheta, explicaremos cómo se marca en el plano la dirección de la meridiana magnética, y conoceremos el grado de aproximación alcanzado con este instrumento.

CAPÍTULO XIV

Goniómetros de reflexión.

ESCUADRAS.—SEXTANTE.

364. En las páginas 108 y siguientes hablamos largamente de las escuadras de reflexión, por lo cual en este Capítulo nos limitaremos á describir el goniómetro llamado *sextante* que se ve en la figura 257, y consiste en un sector de metal provisto en su centro de un espejo *C* perpendicular al plano del sector, y armado en una pieza giratoria alrededor del centro de éste; con ella gira una alidada que lleva el vernier *G* para leer las fracciones de división de un arco *A B*. La alidada se fija al arco por un tornillo de presión, y se mueve suavemente por el de aproximación *D*.

Otro espejo más pequeño *N*, normal al plano del sector, tiene azogada su mitad inferior y transparente la superior para ver directamente los objetos á través de la última.

La inclinación de los espejos sobre el plano puede modificarse dentro de un pequeño límite por tornillos dispuestos al efecto.

Cuatro vidrios obscuros *F*, montados en anillos provistos de charnelas, pueden colocarse delante del espejo *C* y otros tres vidrios semejantes *E* delante del *N*, para disminuir la fuerza de la luz en observaciones del sol.

Un anteojo *T*, de tres diámetros de potencia, está dirigido al espejo *N* y puede moverse paralelamente á sí mismo, y en consecuencia paralelamente al plano del sector, para conseguir que un hilo de la retícula cubra la línea que separa la parte azogada de la transparente del espejo *N*. Este movimiento se da con el tornillo *K*.

El arco está numerado de *A* á *B* y (contando con el efecto de la doble reflexión) los 60° del arco están divididos en 120°.

El sector está reforzado por piezas transversales y lleva un

mango *H* destinado á tener el sextante en la mano durante las observaciones.

365. Un sextante debe satisfacer á las siguientes condiciones:

a) Los espejos deben ser perpendiculares al plano del limbo.

b) Los espejos deben ser paralelos entre sí cuando coincide el cero del vernier con el del arco *a b*.

c) El eje del anteojo debe ser paralelo al plano del limbo.

Para verificar la primera condición se gira la alidada hasta que el vernier llegue al medio del arco, y teniendo el espejo *C* hacia el observador se visa oblicuamente, de modo que se vea al mismo tiempo el limbo por reflexión y directamente, y si aparecen ambas imágenes como un arco continuado, el espejo *C* es normal al limbo. Si no se verifica la condición de perpendicularidad, el arco se ve quebrado en el punto de unión de las partes directa y reflejada.

Para verificar lo posición del espejo *N* se visa con el anteojo directamente un punto muy bien determinado, una estrella, por ejemplo, y se mueve la alidada hasta hacer coincidir la imagen directa con la doblemente reflejada. Si no se logra esa coincidencia, sino que una imagen pasa al lado de la otra cuando la alidada se mueve más acá y más allá del cero del limbo, la condición de perpendicularidad no se ve satisfecha y habrá que corregir el espejo con los tornillos apropiados.

Cuando el cero del índice coincide con el del limbo, si los espejos son paralelos se verá una sola imagen del punto observado. Si esto no sucede, la desviación constituye el *error de índice* que se agrega con su signo á las lecturas hechas en cada observación. Para determinar el error se sobreponen las imágenes directa y reflejada de un punto y se lee la pequeña diferencia entre la posición real del índice cero y la que debiera tener, que es la que coincide con el cero del limbo.

La tercera condición es fácil de llenar cumplidamente por el constructor y rara vez necesita rectificarse. Con el sextante,

así como con el grafómetro representado en las figuras 28 y 29, se mide el ángulo que forman las visuales mismas, esto es: se dispone el arco graduado en el plano que pasa por los puntos visados y el ojo del observador, mientras que con los universales se mide el ángulo de los planos verticales que contienen las visuales, ó sea la proyección horizontal del ángulo de éstas.

366. Se construyen también sextantes, llamados de bolsillo, más pequeños que el descrito, pues mientras que el modelo de la figura 257 permite apreciar por el vernier los 10″, el de bolsillo da sólo aproximación de 1′ (1). Damos (fig. 258) un dibujo de este último instrumento.

El sextante tiene su principal aplicación en la astronomía náutica, pero en la Topografía se utiliza para reconocimientos y operaciones que requieran rapidez.

CAPÍTULO XV

Niveles.

367. Los niveles son instrumentos destinados especialmente á la determinación de la diferencia de altura de los puntos con relación á un plano horizontal ó sea á la determinación de la coordenada vertical z.

Ya vimos que ésta puede conocerse por varios métodos: *a)* por nivelación barométrica; *b)* por la medida del ángulo de altura y de la longitud de la visual dirigida del punto de observación al observado, y *c)* por la medida directa del desnivel.

El primer método fué examinado en el Capítulo VIII, el segundo se expuso someramente en la página 204 y se deta-

(1) Véase el Pocket sextant de Gurley, Catálogo citado, pág. 389.

lla en el segundo volumen, y el tercero se estudiará en el Capítulo "Nivelación topográfica" del propio tomo.

Nos ocuparemos aquí de describir los instrumentos que para el último método se emplean; pero daremos, aunque brevemente, las razones que ameritan la creación de un instrumento especial para nivelar, á pesar de tener en el *universal* un instrumento no sólo apto para dar desniveles sino también otros datos de importancia.

Para el buen éxito de un levantamiento conviene partir de las dimensiones mayores, pasar á las menores y llegar á los detalles, mientras que para la medida de una diferencia de nivel se sigue el camino opuesto, partiendo de las pequeñas dimensiones para llegar á las grandes.

Los problemas que comunmente exigen la determinación exacta de los desniveles son los de trazo definitivo de vías férreas, caminos ó canales. Para efectuar el trazo se principia por el estudio de una extensa zona de terreno cuyo límite se ha establecido previamente por consideraciones económicas, administrativas, militares, etc. Un primer reconocimiento, hecho por medios rápidos y operadores expertos, reduce la zona á una menor extensión, que se procede á medir por procedimientos más exactos para tener una representación del terreno, y poder elegir entre los varios trazos posibles, el que sea más económico, proporcione mayor seguridad á las obras ó, en una palabra, satisfaga mejor al desideratum técnico prefijado.

Estos levantamientos se efectúan perfectamente valiéndose de un Universal topográfico y llegamos, por los métodos que explicaremos en el tomo segundo, á encontrarnos con un cierto número de puntos cuyas coordenadas conocemos y por todos los cuales pasa una superficie que consideramos como la representación de la del suelo.

Pero es evidente que por numerosos que sean estos puntos no serán sino en cortísimo número con relación á los infinitos del terreno y no podremos contar con que las líneas

trazadas en el plano correspondan con el rigor necesario en las coordenadas verticales, á las verdaderas trazadas sobre el suelo.

En otros términos: para estudiar la forma general del terreno ó para determinar una extensión superficial, conviene emplear un Universal; para hacer el trazo material de una línea bien definida, como la de eje de un canal, de una vía férrea, etc., para la que no se puede admitir como suficiente la aproximación del levantamiento general, al menos por lo que respecta á z, se recurre á un instrumento especial: *el nivel.*

368. *Horizontal verdadera y horizontal aparente.*—Sean (fig. 259) a y b dos puntos del terreno distantes entre sí una cantidad A medida sobre la recta $a\,b$, perpendicular á la $C\,a$ que suponemos es el radio de la Tierra, cuyo centro es C y cuya superficie es cortada por el plano vertical $C\,a\,b$, según el arco de círculo $a\,d$.

Si en a suponemos colocado un nivel cuyo eje esté horizontado y sea paralelo á la línea de colimación de un visador, la observación de b no nos revelará diferencia de altura de este punto con relación á a, sino que ambos nos aparecerán sobre la horizontal $a\,b$. Esta línea se llama *horizontal aparente* para distinguirla de la *horizontal verdadera* que, dada la forma de la Tierra, no puede ser una recta, sino un arco de círculo $a\,d$ cuyos pnntos están evidentemente á igual distancia del centro C.

Así, en el caso de nuestra figura, los puntos a y b están al mismo nivel aparente, pero en realidad existe entre ellos el desnivel verdadero $d\,b = x$. ¿Hasta qué límite puede admitirse como confundiéndose la horizontal verdadera con la aparente? Cuestión es ésta que resolvemos en el segundo volumen, á cuyo Capítulo "Nivelación topográfica" remitimos al lector; sólo haremos observar que *los instrumentos dan la horizontal aparente.*

369. *Varias clases de niveles.—Nivel de burbuja, nivel de agua,*

nivel de pesa.—Esta clasificación se basa en el medio indicador de la constante disposición del instrumento.

Sabemos ya en qué se funda el nivel de burbuja, y cómo variando su radio de curvatura se varía su sensibilidad hasta alcanzar la cifra que corresponda al fin deseado, la cual, en los instrumentos topográficos se limita á unos 6″ á 10″ para un desalojamiento de la burbuja igual á 1^{mm}.

En los niveles llamados de agua se utiliza la propiedad de los líquidos encerrados en vasos comunicantes, de disponerse con sus superficies libres al mismo nivel.

En los de pesas (de los cuales el de albañil es un ejemplo) se dispone la línea de mira perpendicular á la dirección adoptada por un cuerpo libremente suspendido, es decir se dispone horizontal.

370. En relación con la amplitud, digamos así, del fin alcanzado con los niveles, se dividen en: *a) niveles sobre una línea*, los cuales, aunque pueden girar, deben regularizarse de posición en cada dirección, para dar la horizontal, y *b) niveles sobre un plano*, los que, una vez regularizados de posición por medio de los tornillos de la base como los Universales, dan la horizontal en todas direcciones girándolos alrededor de un eje vertical.

Describiremos algunos ejemplares de niveles de las clases mencionadas.

NIVELES DE BURBUJA.

371. Es muy grande la variedad de disposiciones de detalle de esta clase de niveles, pero pueden, basándose en la disposición relativa del anteojo y la burbuja, llevarse á tres tipos:

a) Niveles de anteojo y nivel fijos (llamados también *tipo inglés)*,

b) Niveles de anteojo y nivel móviles (tipo Lenoir) y

c) Niveles de anteojo móvil (tipo Egault).

Se hallan en el comercio construcciones más complexas, como la del nivel de compensación de Breithaupt, etc.

372. *Condiciones á que debe satisfacer el nivel de burbuja* (1).— Un nivel de burbuja debe tener:

a) El eje de rotación del instrumento perfectamente vertical.

b) El eje del nivel perpendicular al de rotación.

c) La línea de colimación paralela al eje del nivel.

d) La línea de colimación paralela al eje de deslizamiento de los tubos del anteojo.

La existencia de las condiciones *a* y *b* se verifica por los medios explicados al hablar de los Universales, y puede rectificarse por medio de tornillos dispuestos al efecto.

Según el tipo de nivel, se investiga si se ha llenado la condición *c;* por esto no trataremos aquí esta cuestión, sino lo haremos al describir cada uno de los tres tipos mencionados.

Dijimos en la página 135 en qué consiste la dificultad para satisfacer á nuestra condición *d)* del párrafo anterior, y vamos ahora á examinar la influencia que su falta ejerce en las observaciones con un nivel; pero debemos desde luego advertir que un buen constructor siempre alcanza el paralelismo entre el eje de colimación y el de deslizamiento á un grado muy elevado.

Sea A (fig. 260) el crucero de los hilos, B el centro óptico del objetivo, y en consecuencia $A\,B\,C$ la visual á la mira M. Supongamos visada otra más cercana M' y desalojado el crucero, no en prolongación de $B\,A$, como habría sucedido con un deslizamiento correcto, sino al punto A' que determina con B la línea de mira $A'\,B\,C'$, en vez de la $A\,B\,D$. Llamemos K la distancia $B\,C$, K' la $B\,C'$, ψ el ángulo muy pequeño $A\,B\,A'$, ψ' el ángulo $C'\,C\,B$ que es la desviación en el espacio del eje de colimación por efecto del desalojamiento del crucero, é y la longitud $C'\,D$.

(1) Nos referimos á los niveles sobre un plano; los niveles sobre una línea no están obligados á llenar la condición *a*).

En el triángulo $B\ C'\ D$ se tiene:

$$y = K' \tan \psi$$

que, dada la pequeñez de ψ, puede tomarse:

$$y = K' \psi$$

y en el triángulo $C'\ D\ C$, cuyo ángulo ψ' es muy pequeño,

$$\psi' = \frac{y}{K - K'}$$

y sustituyendo el valor de y:

$$\psi' = \frac{K'}{K - K'} \psi$$

Si suponemos $K = 100^{m}$ y $K' = 4^{m}$

$$\psi' = \frac{4}{96} \psi$$

y si ψ es de $10''$ (error que un buen constructor no puede dejar pasar inadvertido), resultará $\psi' = 0.''4$ solamente.

Pero aun este pequeño error no afecta á la determinación de y (véase párrafo 374), si se sigue el procedimiento allí explicado.

Hay niveles, como el Gurley descrito en el párrafo 378, que tienen tornillos para corregir el eje de deslizamiento de los tubos.

373. *Nivel Porro (tipo inglés*, núms. 140 y 141 del Catálogo Salmoiraghi). En los niveles de este tipo el constructor ha colocado paralelamente los ejes de colimación y del nivel, sin dejar al ingeniero la posibilidad de modificar la relativa posición de los dos ejes.

La figura 261 nos representa en proyección vertical el nivel Porro, y la figura 262 el mismo instrumento cortado por un plano también vertical y perpendicular al anterior.

El instrumento consiste en un telescopio de 45^{mm} de abertura y de 35^{cm} de distancia focal, con ocular ortoscópico, de aumento de 30 veces, analático y con micrómetro de tres hi-

los para medir distancias, siendo $\omega = \frac{1}{100}$. Sobre el anteojo está fijado un nivel L, cuya sensibilidad es de $5''$.

Un caballete F sostiene el anteojo por medio de dos fuertes tornillos v y v_1 que sirven de pernos cuando se mueve verticalmente el telescopio para nivelarlo girando el tornillo V, reaccionado por el resorte m.

El conjunto descrito está encerrado en una cajita de madera cerrada en sus extremos por dos correderas de metal c y c'.

Desde el exterior de la caja se pueden mover dos tornillos; el V para nivelar, y el V_1 para afocar.

La cara superior de la cajita lleva una puerta rectangular que el operador levanta é inclina á 45° para ver reflejada la burbuja L en el espejo que la puerta lleva en su parte inferior.

Las correderas $c\,c'$, y el espejo se cierran cuando no se usa el instrumento para librarlo de choques que alteren sus ajustes.

Este nivel se construye de dos tamaños: el descrito y otro mayor que lleva telescopio analático con objetivo de 55^{mm}, aumento de 45 veces y un nivel cuyo radio de curvatura es de 100^{m}, la graduación de 2^{mm} y la sensibilidad de $2''$, de manera que á cada milímetro de desalojamiento de la burbuja corresponde 1^{mm} de desnivel por cada 100^{m} de distancia.

La numeración del nivel está hecha de manera que restando de la suma de las lecturas el número 1000 se obtiene directamente el número de milímetros por cada 100^{m}, que deben añadirse ó sustraerse de la altura leida H, para tener la correspondiente al caso en que la burbuja esté centrada. Esto es, que si α y β son las lecturas de los extremos de la burbuja y n el número dicho de milímetros, se tendrá:

$$\alpha + \beta - 1000 = n$$

De manera que si H es la altura en metros del punto de la mira intersección de la horizontal aparente, L la lectura hecha sobre la mira, y d la distancia de ésta al instrumento:

$$H = L + n \cdot \frac{d}{100.000}$$

Si los valores del radio y de las divisiones fuesen diferentes de las expresadas, se establecerá la fórmula análoga.

El nivel Troughton es del mismo tipo que el descrito, pero no va encerrado en una caja.

374. *Rectificación de un nivel tipo inglés.*—La rectificación de que nos ocuparemos es la del paralelismo del eje de colimación, con el del nivel, porque la imposibilidad de invertir el anteojo no permite hacer la rectificación por los medios explicados en el Capítulo XII.

La posición del eje del nivel respecto al de rotación se verifica como en los Universales, y se corrige por medio de tornillos que levantan ó bajan uno de los apoyos del anteojo.

Supongamos un nivel afectado del error de paralelismo de los ejes citados dispuesto en estación, y que desde ella visamos una mira métrica colocada sucesivamente en dos puntos. Sea (fig. 263) OP la horizontal aparente, y OQ la visual que forma con la vertical ZZ el ángulo φ en vez del de 90°, H la altura observada, z la verdadera mP y K la distancia Zm.

En el triángulo OPQ tendremos:

$$H - z = K \cot \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si repetimos la operación para el otro punto tendremos:

$$H_1 - z_1 = K_1 \cot \varphi$$

y restando estas ecuaciones:

$$(H - H_1) - (z - z_1) = (K - K_1) \cot \varphi$$

Si ponemos

$$H - H_1 = \Delta H, \quad z - z_1 = \Delta z \text{ . y } K - K_1 = \Delta K$$

$$\Delta H - \Delta z = \Delta K \cot \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

ecuación que tiene las dos incógnitas Δz y φ; pero si cambiamos de estación el instrumento y volvemos á observar la mira en los mismos dos puntos tendremos análogamente:

$$\Delta H' - \Delta z = \Delta K' \cot \varphi \quad \text{.....} \quad (B)$$

Dividiendo la (A) por la (B)

$$\Delta z = \frac{\Delta K \Delta H' - \Delta K' \Delta H}{\Delta K - \Delta K'} \quad \text{.....} \quad (C)$$

y restando la (B) de la (A)

$$\cot \varphi = \frac{\Delta H - \Delta H'}{\Delta K - \Delta K'} \quad \text{.....} \quad (D)$$

Estas son las fórmulas dadas por Porro para la nivelación con dos miras.

Por medio de las fórmulas (C) y (D) se puede determinar, aun con nivel incorrecto, el valor verdadero del desnivel y el ángulo ($90° - \varphi$) formado por los ejes, que es el *error sistemático* del instrumento.

375. Si suponemos el instrumento colocado á igual distancia de los puntos visados para determinar su desnivel, en la ecuación $K - K' = \Delta K$, resultará $\Delta K = 0$ y de consiguiente:

$$\Delta z = \Delta H$$

independientemente de cualquier valor de φ.

El procedimiento de estacionarse en un punto equidistante de las miras elimina no sólo el error de que nos ocupamos, sino el de que hablamos en el párrafo 372 y el de divergencia entre la horizontal aparente y la verdadera.

Una vez determinado φ por la fórmula (D) se puede proceder con un instrumento incorrecto aplicando la fórmula deducida de la ecuación (1):

$$z = H - K \cot \varphi$$

En el tomo segundo estudiamos detalladamente esta cuestión.

Si el error φ es muy grande puede disminuirse moviendo la retícula por medio de sus tornillos propios, pero no hay que olvidar que esto puede traer el desalojamiento del eje de de colimación en relación al deslizamiento del tubo.

Es mejor, en todo caso, llevar en cuenta la corrección ó eliminarla observando en puntos equidistantes de la mira.

376. *Nivel de anteojo y nivel móviles (tipo Lenoir).*—El principio fundamental de los niveles de este tipo y de los del Egault es que permiten disponer instrumentalmente el eje de colimación según la horizontal aparente, mientras que con el nivel del tipo inglés se admite que la horizontalidad del eje del nivel indica, por construcción, la horizontalidad de la línea de colimación.

En el Lenoir, que dió origen al nivel más común en Alemania, la línea de apoyo del telescopio puede hacerse paralela al eje del nivel. En el Egault, de nivel fijo al perno vertical y anteojo móvil, la horizontalidad de la línea de colimación se consigue haciéndola perpendicular al eje vertical de rotación.

El primitivo nivel Lenoir (fig. 264) tiene un anteojo fijo invariablemente á dos prismas de metal rectangulares *A* y *B*, perfectamente iguales, los cuales descansan sobre un platillo sostenido por los tornillos nivelantes. El anteojo con sus prismas puede girar sobre el platillo *O*, *O*, alrededor de una espiga cilíndrica, introducida en el centro del mismo, y que impide todo movimiento de traslación. Otra espiga *a* igual y simétricamente colocada en su parte superior, se introduce en un taladro cilíndrico que presenta la regla en que está armado un nivel provisto de su tornillo *r* de corrección particular, la cual se apoya además en las caras superiores de los prismas. El nivel con su armadura puede invertirse de posición con respecto á sus extremos, y también separarse del resto del instrumento; permitiendo entonces levantar del mismo modo el anteojo y volverlo á colocar cambiando la posición de la espiga y de las caras superiores de los prismas, que se hacen venir á la parte inferior; lo que equivale á dar una semirevolución exacta al anteojo alrededor de su eje de figura.

En el Lenoir la condición de paralelismo entre el eje del nivel y la línea de colimación se verifica de la siguiente manera:

Por el procedimiento general, y usando el nivel como parte del anteojo, se hace horizontal el reborde del platillo. Logrado esto, para investigar si la línea de colimación pasa por el eje de los prismas, se visa un punto y se invierte después el telescopio haciendo que le sirvan de apoyo las caras de los prismas que estuvieron antes hacia arriba. Si la visual queda desviada deberá corregirse la mitad de la desviación por medio del movimiento de la retícula. Se repetirá la prueba hasta lograr la coincidencia en la inversión.

Resta inquirir si los dos prismas son de igual altura para que la línea de colimación, eje de los prismas, sea paralela al plano horizontal. Esto se verifica invirtiendo el nivel de modo que el extremo que apoyaba en un prisma apoye en el otro, y viendo si la burbuja ocupa el centro; si no es así, habrá que disminuir la altura del más alto frotándolo con esmeril.

377. *Nivel de anteojo móvil y nivel fijo (tipo Egault).*—En este instrumento (fig. 265) el anteojo apoya con dos anillos en dos soportes en forma de V, fijados en los extremos de una pieza horizontal *H H*. Abiertos los pasadores que encierran el anteojo en los soportes, puede éste sacarse de ellos é invertirse 180°; igualmente puede girarse sobre el eje de figura de la superficie cilíndrica de los anillos.

La pieza *H H* puede girar alrededor del eje vertical; y bajo ella hay un círculo graduado con tornillos de presión y aproximación.

El nivel *n* se liga á *H H* por una charnela *c* y dos tornillos de rectificación *a* y *a'*.

Veamos cómo se obtiene en un nivel Egault la horizontalidad de la línea de colimación. Ante todo se dispone verticalmente el eje de rotación de la manera bien conocida para lograr que ese eje y el del nivel sean perpendiculares entre sí; después se hace perpendicular la línea de colimación al eje de rotación y así se tendrá esa línea perfectamente horizontal.

Para lograr la perpendicularidad se principia por hacer coincidir el eje mecánico del telescopio, que es el de los ani-

llos de apoyo, con el de colimación, para lo cual se visa un punto, se gira el anteojo sobre sí mismo y se observa si el punto visado no salió del crucero de los hilos. Si hubo desalojamiento se mueve la retícula la mitad del error. Corregida la línea de colimación para averiguar si los dos soportes tienen igual altura se visa un punto bien determinado, se saca el anteojo de sus apoyos invirtiéndolo extremo por extremo, se gira el instrumento 180° para volver á visar el mismo punto. Si no hubo desalojamiento vertical, quiere decir que las líneas de apoyo del anteojo, las generatrices de la superficie de los anillos son rectas horizontales, y vimos que éstas eran paralelas á la de colimación. Si hay error se alza ó baja uno de los soportes *V* que para el efecto es variable en altura.

378. *Nivel Y.*—El nivel de este nombre, representado en la figura 266, es el preferido de los Ingenieros americanos, y

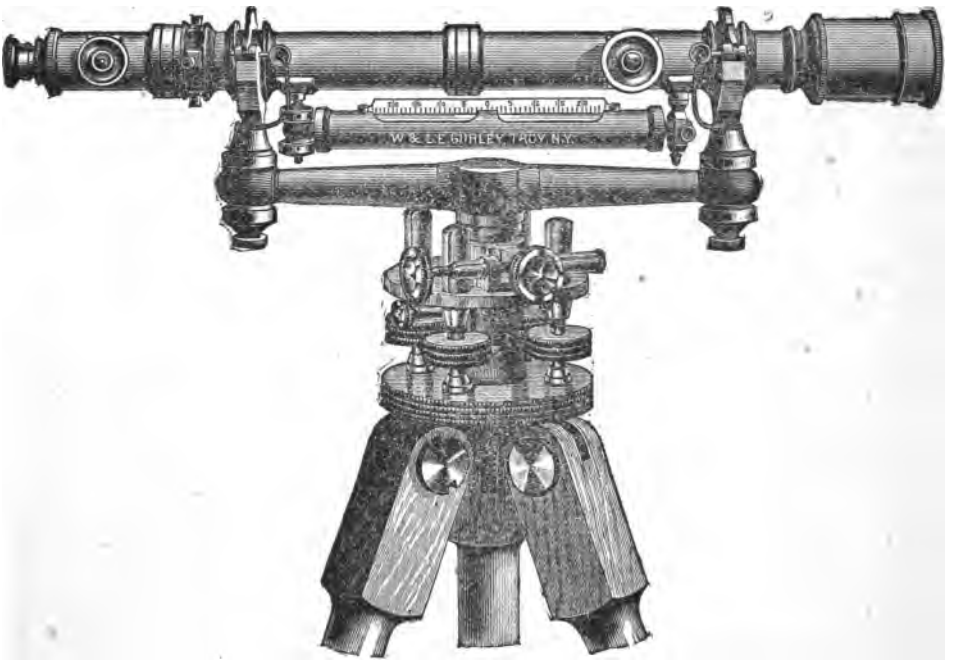


Fig. 266.

se relaciona al tipo Egault que acabamos de estudiar, no obstante que el nivel va unido al anteojo en el nivel Y, y no inmediatamente á la pieza *H H*, pero en substancia las condiciones son las mismas, porque el anteojo puede decirse que constituye la armadura.

Las condiciones á que debe satisfacer, son las ya explicadas: 1ª, coincidencia de los ejes mecánico y de colimación; 2ª, paralelismo del eje del nivel con la línea de apoyo (1), y 3ª, perpendicularidad del eje del nivel al vertical de rotación.

La 1ª condición se verifica visando un punto bien determinado, girando el anteojo 180° sobre su eje de figura y examinando si el punto visado quedó cortado por el crucero. Si hay error se corrige con los tornillos *B*. La 2ª se verifica centrando la burbuja con dos tornillos nivelantes paralelos al anteojo, fijando en esa posición la pieza de apoyo de los soportes é invirtiendo el nivel. Si no vuelve la burbuja al centro del eje del nivel, no es paralelo á la línea de apoyo del telescopio, y hay que corregir con los tornillos del extremo del nivel. La 3ª se verifica como se ha explicado en general y se corrige con los tornillos de los extremos de la pieza de soporte.

El modelo que nos ocnpa tiene un tornillo para afocar el ocular y otro para afocar el objetivo, un ajuste que se ve en *A A* para centrar el ocular, y otro en *C* para asegurar el exacto deslizamiento del objetivo.

De estos niveles, Gurley manufactura cinco tamaños con anteojos de 12, 15, 18, 20 y 22 pulgadas.

379. *Nivel de doble graduación.*—La dificultad de construir un nivel cuyo anteojo tenga los anillos de apoyo exactamente iguales, para que sus superficies sean una continuación de otra, ó formen parte de un solo cilindro y no de un cono muy agudo, ha sugerido la idea del nivel de *doble graduación* ó de *compensación*, cuyo más interesante tipo es el Breithaupt. La disposición de éste es análoga al de Y descrito en el pá-

(1) Esta línea es paralela al eje mecánico.

rrafo anterior; pero el nivel, no obstante su unión con el anteojo, puede girar alrededor de una recta paralela á su propio eje, y en consecuencia paralela á las líneas de apoyo del anteojo, supuesta esta condición rectificada.

Nivelado un instrumento correcto, estas últimas líneas serán horizontales, y si los anillos son perfectamente iguales, girando el anteojo sobre sí mismo, el eje del nivel gira alrededor de una recta horizontal, eje mecánico del anteojo, y debe seguir acusando la horizontalidad. Si los anillos son desiguales el eje del nivel describirá en su movimiento una superficie cónica, y la burbuja abandonará su posición central.

No siendo esto visible con la disposición común de un tubo dentro de una armadura, porque al girar el anteojo queda oculta la burbuja, se ha montado el nivel de modo que puede también girarse, de suerte que al llegar á lo alto se mueve sobre sí mismo para dejar hacia arriba la graduación y ver en ella el ángulo del cono de los anillos.

También se construyen niveles descubiertos y con dos graduaciones para que siempre haya una del lado de la burbuja. Estos niveles deben tener sus dos ejes rigurosamente paralelos, lo cual es tan difícil logre el constructor, como hacer iguales los anillos.

Se elude una dificultad creándose otra.

380. *Niveles de pendiente.*—Estos instrumentos se destinan á la medida de inclinaciones pequeñas de la línea de mira, y se utilizan por lo tanto en el trazado de caminos y canales, que generalmente tienen largos tramos de pendientes dadas y constantes. Es cierto que pueden éstas señalarse con un nivel y una mira, pero los niveles de pendiente ó *clisímetros* evitan bastante trabajo.

Consisten los clisímetros en un nivel que tiene uno de los soportes del anteojo, móvil en altura cantidades relativamente considerables. El anteojo toma diversas inclinaciones al subirse ó bajarse el apoyo paralelamente al perno del instru-

mento, el valor de las cuales se lee en una escala de grados y fracciones que lleva una barra prolongación del apoyo móvil y en otra escala de tangentes de los mismos ángulos grabada en la propia barra.

El Profesor Stampfer compuso un clisímetro cuyo nivel es del tipo Egault, y tiene un tornillo micrométrico vertical para medir las pendientes.

381. *Niveles sobre una línea.*—El estudio hecho de los niveles sobre un plano nos dispensa de entrar en detalles al hablar de estos instrumentos cuyo empleo se reduce á los trabajos de menor importancia. Con ellos no se dispone un plano horizontal, sino sólo se da esta posición á la línea actual de mira.

La figura 267 representa un nivel del tipo inglés, y llamado por los ingleses *agricultural drainage level.*

La figura 268 nos hace ver en corte vertical un nivel de burbuja reflejada (1), que puede usarse en tripié, pero que generalmente se emplea á mano, centrando la burbuja simultáneamente con la lectura de la mira. Este instrumento es muy útil en reconocimientos, y consiste en un pequeño anteojo, que lleva en su parte inferior el nivel *f*, y en el tubo un espejo que refleja la imagen de la burbuja (iluminada por una ventana *y*) hacia el ocular *b*. Una perforación del espejo permite ver hacia la mira y leer en ella la indicación correspondiente á la posición simétrica de la imagen de la burbuja con relación al hilo horizontal. Si se usa pie se fija la rodilla *h* y se nivela con el tornillo *k*.

El nivel de mano de Locke (fig. 268 bis), el nivel y el clisímetro Abney, el Wagner y otros son modificaciones del que acabamos de describir.

382. *Nivel de agua.*—Este nivel, representado en la figura 269, por su sencillez, poco costo y la facilidad de manejarlo, es bastante usado en trabajos que no requieren una gran exactitud.

Visando por medio de las dos superficies libres del agua

(1) Catálogo de R. Reiss.

que llena el tubo horizontal de latón y parte de los dos verticales de vidrio *A*, ó sea por el medio de las dos líneas negras que nos presentan (á causa de la curvatura de los bordes producida por la capilaridad), se tiene una visual horizontal.

Si se gira el instrumento alrededor del eje vertical para visar en diversas direcciones, se determinarán líneas contenidas en un mismo plano horizontal, siempre que el eje referido sea exactamente vertical. Si esto no sucede, las visuales estarán en diversos planos, pero tan poco separados entre sí que se pueden admitir como confundidos en uno solo, si se toma la precaución de acercarse á la verticalidad del perno de rotación.

Los dos tubos *A* deben ser del mismo diámetro (unos 25 á 40^{mm}), para que la acción de la capilaridad tenga igual influencia en ambos.

Es conveniente dirigir las visuales de modo que sean tangentes al lado derecho de un tubo y al izquierdo del otro, ó vice versa, y no hacerlas pasar por el mismo lado de los dos, para que en un pequeño movimiento involuntario de la cabeza del observador no se cubra un tubo y la mira con el otro, como sucede observando del mismo lado de los tubos.

Conviene igualmente colocar el ojo á cosa de 1^{m} del primer tubo para disminuir la dificultad de acomodación á las desiguales distancias de las superficies líquidas y la mira.

Las visuales no deben pasar de unos 30^{m} de longitud, y en esas condiciones un operador práctico puede no llegar á errores de $\frac{1}{500}$ y aun de $\frac{1}{1000}$ de la distancia.

383. *Nivel de pesa ó de péndulo.*—De los muchos niveles de péndulo y anteojo que se han imaginado, sólo se emplean actualmente algunos de los más sencillos, consistentes en un telescopio que puede girar libremente alrededor de un eje transversal, y está unido á un peso, de modo que resulta dispuesto horizontalmente.

Nuestra figura 270 enseña un nivel de pesa Mayer. Lleva un círculo vertical graduado y puede utilizarse como nivel,

disponiendo el índice en el cero, ó como eclímetro leyendo en el círculo. La línea de los ceros es horizontal cuando el peso cuelga libremente.

Esta condición es la esencial en los niveles de péndulo, y se verifica determinando con el instrumento el desnivel entre dos puntos *A* y *B*, para lo cual hay que colocarse equidistante de las dos miras á fin de eliminar la influencia del error que pueda tener el nivel, y observando después desde *A* el punto *B* para obtener un desnivel que, comparado con el exacto determinado antes, nos dice si el instrumento está ó no corregido.

El Coronel Goulier es autor de un nivel de péndulo usado por el ejército francés.

384. *Miras para nivelación.*—Con los instrumentos de nivelación se usan miras verticales que dan la distancia del suelo al punto cortado por la visual horizontal, y son de dos clases principales: unas idénticas á las descritas en el Capítulo X, y otras especiales para nivelación, que consisten en dos reglas de madera, que pueden unirse ó disponerse una en prolongación de otra, según que se necesite una altura de unos 2^m ó la doble de ésta.

Una tablilla ó corredera se puede deslizar á lo largo de la mira y se presenta al observador en forma de un rectángulo de unos 0^m25 de base por 0^m20 de altura, dividido en cuatro rectángulos, dos de los cuales, correspondientes á una misma diagonal de la tablilla, están pintados de un color, y los correspondientes á la otra de color diferente para destacar mejor la mira del fondo en que se ve proyectada, y marcar la línea horizontal que debe ser cortada por el hilo del nivel.

Las reglas están graduadas en centímetros, y la corredera arrastra consigo un vernier cuyo cero es el índice que marca la altura sobre el suelo de la línea horizontal de separación de los colores de la tablilla.

El observador hace señas al portamira para que corra hacia arriba ó hacia abajo la tablilla hasta lograr se encuentre á la

altura de la visual. Entonces lo indica al portamira, quien fija la tablilla á la regla por medio de un tornillo de presión, lee los centímetros enteros en la regla y aprecia los milímetros con el vernier.

Fig. 271.

Fig. 272.

Hay una gran variedad de modelos de estas miras; sólo daremos dos (figuras 271 y 272), tomadas del Catálogo Gurley

varias veces citado, y que son: la primera la llamada "Mira Filadelfia," y la segunda "Mira Nueva York."

La Filadelfia tiene 7 pies de largo, y corriendo una parte fuera de la otra alcanza una longitud de 14 pies. Está dividida en pies y sus décimos.

La mira Nueva York está formada de tres ó cuatro reglas para aumentar más la altura de ella; la de tres piezas puede llegar á 12½ pies, y á 16 la de cuatro partes. Hay numerosos modelos de miras con graduación métrica.

QUINTA PARTE.

INSTRUMENTOS ACCESORIOS.

CAPITULO XVI.

Instrumentos para medir líneas, ángulos ó superficies sobre el papel.— Pantógrafos.

385. Reglas.—La medida directa de las líneas sobre el dibujo se hace por medio de una regla dividida, cuya longitud es comunmente de 20 centímetros (y se llama por ello *doble-decímetro*) ó de 50 centímetros; son generalmente de madera, de acero ó de marfil, y llevan la división sobre los bordes que se hacen lo más delgados posible para que las divisiones queden cercanas al papel y se evite la *paralaje*. Las reglas deben ser perfectamente rectas y estar exactamente divididas. Una y otra condiciones se consiguen mejor en las de acero, pero en cambio son más costosas y pesadas; las de marfil pueden dividirse bien y son ligeras, pero no se consiguen en piezas de mucha longitud y siempre se prefieren de acero. La madera se usa en las reglas más baratas y no hay que fiar en las comunes del comercio para trabajos medianamente delicados, sino después de compararlas con una regla patrón, y de asegurarse de que sus bordes son líneas rectas. La apreciación eficaz que puede hacerse á la simple vista con una regla di-

vidida en medios milímetros, debe considerarse limitada á la longitud de $\frac{1}{5}$ de milímetro.

386. *Transportadores ó goniógrafos.*—Los transportadores son instrumentos destinados á trazar sobre el plano direcciones que formen entre sí ángulos dados.

Los hay de variados tamaños, formas y materiales, desde los de papel transparente, cuerno, talco, etc., que se encuentran en los estuches de compases, hasta los de metal, divididos con exactitud y acompañados de vernieres, pero todos consisten en un semicírculo ó en un círculo entero con su graduación saxagesimal ó centesimal.

Nos limitaremos á describir uno de los mejores modelos, seguros de que se comprenderán las ventajas ó defectos de cualquier otro que se llegue á examinar. Hablaremos del transportador de círculo entero de Pensa (representado á la escala de 1'3 en la figura 273), que consta de un anillo graduado en su borde interior; que se mantiene inmóvil sobre el dibujo por dos pesas P, P', aplicadas sobre dos brazos ligados al anillo a a.

Dentro del anillo gira una especie de cruz de metal, uno de cuyos brazos [b] lleva una regla con su borde graduado dispuesto según el diámetro del anillo y un vernier v, para leer los desalojamientos angulares de la regla mencionada.

Otro transportador muy usado por los ingenieros americanos es el Croizet, de vernier fijo y semicírculo graduado móvil.

En el segundo volumen, al hablar de la construcción de los planos, diremos cuál es el grado de aproximación alcanzado con estos instrumentos.

Planímetros.

387. La determinación de la superficie de una porción de terreno, puede hacerse con los elementos numéricos recogidos en el campo ó con los gráficos de la figura semejante que representa en el dibujo á escala conocida el terreno medido.

En el segundo volumen nos ocupamos detalladamente de los métodos numéricos de cálculo de áreas, y aquí describiremos sólo el puramente instrumental que resuelve el problema de determinar una superficie con suma sencillez y con exactitud bastante en muchos casos.

Los instrumentos que sin necesidad de cálculos dan el área de una figura dibujada en un plano, se llaman *planímetros*, y son de dos clases principales: *ortogonales* y *polares*. Los estudiaremos sucesivamente.

388. *Planímetro ortogonal.*—Este instrumento fué ideado independientemente por el bávaro Herrmann en 1814, y por el toscano Gonella en 1824, y ha sido perfeccionado después por Erust, Wetli, Hanseu, etc.

La idea fundamental del planímetro ortogonal es la siguiente: (1) "hacer girar un círculo un ángulo proporcional á la base b y á la vez á la altura a de un rectángulo, y por consecuencia proporcional al producto $a\ b$. Es claro que si esto se verifica, el arco que pasa delante de un índice fijo está expresado por $k\,a\,b$ (siendo k un número que depende de las diversas partes del instrumento).

"En el planímetro Wetli una ruedita R (fig. 274) apoya sobre un plato horizontal P, soportado por un cilindro vertical en el que enrolla un hilo de plata. Las dos extremidades del hilo están unidas á una regla móvil (paralelamente á la ruedita), la cual termina en una punta destinada á recorrer el perímetro de la figura por medir. Consideremos un rectángulo $A\ B\ C\ D$, con el lado $A\ B$ en la dirección del movimiento de la punta; cuando esta recorre la línea $A\ B$, el cilindro gira un ángulo proporcional á $A\ B$, y por tanto el punto del plato que está bajo la ruedita describe un arco igual á $A\ B$ multiplicado por la relación

$$\frac{d}{r}, \text{ sea } \frac{d\,b}{r},$$

(1) Erede.—Topografía, pág. 266.

llamando d la distancia de la ruedita al centro del plato, y r el radio del cilindro. El mismo arco describe un punto cualquiera de la ruedita."

El plato P se puede mover junto con la regla en dirección perpendicular á la ruedita; podemos, pues, llevar la punta de B á C sin que se mueva la ruedita. Llevando después la punta de C á D, la rueda describirá, en sentido contrario al primer movimiento, un arco

$$\frac{d+a}{r} \cdot b$$

porque actualmente la distancia de la ruedita al centro se ha hecho $d + a$; la diferencia de los dos arcos, ó sea el desalojamiento resultante (que queda el mismo si se recorre también DA para volver al punto de partida) es

$$\frac{ab}{r},$$

y se ve, amplificada, sobre un cuadrante fijo Q, mediante un índice llevado por un árbol horizontal que gira unido á la ruedita, y al cual está añadido un contador de las vueltas. Se ve fácilmente que recorriendo con la punta el perímetro de dos rectángulos AC, AE, el índice da el área de su suma dividida por r, y lo mismo sucede para una figura cualquiera que puede considerarse como la reunión de rectángulos infinitesimales. Los radios del cilindro y de la ruedita se escogen de modo que á una vuelta entera de ésta corresponda un número muy sencillo de unidades superficiales, por ejemplo 10 centímetros cuadrados; entonces el cuadrante dividido en 100 partes da décimos de centímetro cuadrado, y pueden estimarse á vista los centésimos. Obtenida la superficie en centímetros cuadrados, es necesario multiplicarla por el valor del área natural correspondiente á un centímetro cuadrado en el dibujo. Hay planímetros que dan, para dibujos á escala fijada, directamente la superficie del terreno.

389. *Prueba del planímetro ortogonal.*—El instrumento debe estar bien rectificado por el constructor; la perpendicularidad de los dos movimientos de la punta, la perfecta forma de la ruedita, el diámetro del cilindro, etc., no son condiciones que pueda satisfacer el ingeniero. Sí puede probar el instrumento midiendo con él un rectángulo de dimensiones muy bien conocidas, y cotejando el resultado obtenido con el planímetro con el dado por el cálculo directo. Para aceptar como bueno un instrumento, es necesario que ambos resultados coincidan al milésimo y que las diferencias sean en uno y otro sentido y no sistemáticamente en el mismo. Si sucede que las áreas medidas siempre aparecen crecidas, es porque el radio del çilindro en que enrolla el hilo es más pequeño de lo que debiera ser, y lo contrario en el caso de áreas menores. Si es pequeño el error se remedia tomando un hilo más delgado en el primer caso y uno más grueso en el segundo. Si las diferencias son grandes debe desecharse el instrumento.

390. *Planímetro polar de Amsler.*—Este instrumento fué ideado por el profesor suizo Amsler, quien le llamó *polar* porque se mueve al recorrerse una figura con la punta destinada á ese fin, al rededor de nn punto fijo ó *polo*.

Este planímetro es más sencillo que el ortogonal, y se construye de dos formas, una de las cuales, correspondiente al planímetro de escalas variables, es la representada en la figura 275. Esencialmente se compone de un brazo y un antebra-

Fig. 275.

zo ligados por una charnela formada por las puntas de dos tornillos, de tal suerte que el movimiento es muy fácil y suave.

El antebrazo lleva el punzón *d* que recorre el perímetro de la figura, y el brazo termina en el *polo e*. El antebrazo además lleva un tambor ó cilindro *c* de eje horizontal, con una graduación en su parte curva que pasa frente á un índice *cero* y vernier *m* que acusan los arcos de revolución del tambor. Un disco contador *l* movido por una transmisión de tornillo tangencial da las revoluciones enteras.

El instrumento colocado sobre un plano descansa en tres puntos: el polo, el punzón y el reborde del tambor. El punzón recorre cualquier perímetro en virtud de los dos movimientos que puede tomar; de rotación al rededor de la charnela *k*, y de rotación de todo el instrumento al rededor del polo. Si se ejecuta sólo el primero, el tambor gira sobre sí mismo por su adherencia con el papel, desarrollándose en su periferia arcos cuya magnitud es función del movimiento del punzón. Si éste se mueve en prolongación del eje del tambor ya no girará el último, sino deslizará sobre el plano. Para el caso general de recorrerse una línea en una dirección cualquiera, el movimiento del cilindro será la resultante de los dos: rotación y deslizamiento, de los cuales el primero se registra en las graduaciones mencionadas.

Consideremos en la figura esquemática 276, que $R\,K\,Q$ es el perímetro del área por medir, $E\,C$ el brazo y $C\,F$ el antebrazo, unidos en la charnela C, D el tambor y F el punzón. Llamemos r la distancia constante $F\,C$ y R la constante $E\,C$.

Si recorremos todo el perímetro con el punzón, C irá ocupando diversas posiciones, pero siempre sobre un arco de círculo cuyo centro es el polo E. Si el polo, en lugar de estar fuera del perímetro como en la figura 276, está dentro como en la 277, C describirá un círculo entero.

Supongamos que de la posición inicial $C\,F$ pasamos á la muy cercana $L\,K$; para ello puede considerarse descompuesto el movimiento efectuado, en dos: uno paralelamente á $C\,F$ para venir á $L\,J$, y otro angular al rededor de L para venir á $L\,K$. El área del pequeño elemento superficial $L\,K\,F\,C$,

será la suma del paralelógramo infinitesimal $CFJL$ que llamaremos p y del sector LJK que designaremos con s.

En el movimiento del antebrazo de CF á LJ desarrollará el tambor en su periferia un pequeño arco cuyo desarrollo será igual á la altura h del paralelógramo, y en consecuencia proporcional á la superficie p, y al pasar de LJ á LK desarrollará otro pequeño arco que tendrá por medida (llamando ρ la distancia DC y φ el arco descrito por el antebrazo) $\rho\varphi$, cantidad proporcional también al área del sector.

Convengamos en que el sentido positivo de la numeración de los arcos desarrollados por el tambor sea, como en la figura, aquel en que el sector está á la derecha del rectángulo y éste á la derecha de CF, ó lo que es lo mismo, cuando el movimiento del punzón se efectúa en el sentido del de las manecillas del reloj.

Ahora bien, el área comprendida entre dos posiciones á distancia finita del antebrazo, estará representada por la suma de las áreas de los pequeños elementos análogos al considerado, é indicándola con S, tendrá por expresión:

$$S = \Sigma p + \Sigma s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si llamamos u el arco desarrollado en el tambor por el paso del antebrazo de una á otra de las posiciones que venimos estudiando,

$$u = \Sigma h + \Sigma \rho\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

y u será una cantidad directamente proporcional al área limitada por un arco del contorno de la figura recorrida por el punzón, por las dos posiciones del antebrazo y por un arco del círculo descrito por C al rededor del polo E.

De las dos posiciones del brazo á distancia finita pasemos á considerar aquella en que es tangente á los puntos extremos de la figura, y de ésta á aquella en que después de haber recorrido todo el contorno, el antebrazo vuelve á la posición inicial. Evidentemente, en el regreso el tambor gira en

opuesto sentido, de manera que el contador dará una diferencia final proporcional al área de la figura recorrida por el punzón.

En el caso de la figura 276, la suma algebraica de los sectores análogos á s se reduce á cero y entonces la ecuación (1) será:

$$S = \Sigma p,$$

y la (2):

$$u = \Sigma h.$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por r

$$r u = \Sigma r h;$$

pero como $r h = p$, tendremos.

$$S = r u, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ecuación que nos dice que cuando el polo está fuera del perímetro de la figura, el área de ésta es igual á la de un rectángulo cuya base constante es la longitud del antebrazo y cuya altura es el arco desarrollado en la periferia del tambor.

Cuando el polo se halla dentro de la figura cuya área se busca, como en la fig. 278, el punto C recorre toda la circunferencia X para que el antebrazo vuelva á su posición inicial CF, y el área total será, además de la $\Sigma p + \Sigma s$, comprendida entre el círculo X y la figura ZZ, la del círculo mismo que tiene por expresión: πR^2. La total será

$$S = \pi R^2 + \Sigma p + \Sigma s.$$

Si la figura misma y el círculo se cortan como en la figura 277, será $\Sigma s = \pi r^2$ y la ecuación anterior se hace:

$$S - \pi R^2 = \Sigma p + \pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3')$$

Por otra parte, al completarse la revolución la suma de las φ se hace la periferia entera y la expresión $\Sigma \rho \varphi$, de la ecuación (2) será:

$$u = \Sigma h + 2 \pi \rho$$

que multiplicada por r se hace

$$r u = \Sigma p + 2 r \pi \rho$$
$$\Sigma p = r u - 2 r \pi \rho$$

y la (3) sustituyendo el valor de Σp:

$$S - \pi R^2 = r u + \pi r^2 - 2 \pi r \rho;$$

haciendo $R^2 + r^2 - 2 r \rho = c$:

$$S = c \pi + r u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Esta ecuación nos dice que si el polo se coloca en el interior de la figura misma, el área es igual á la suma de una área constante ($c \pi$) con la de un rectángulo que tiene por base la longitud (r) del antebrazo y por altura el arco desarrollado por el tambor del instrumento.

Llamemos d la magnitud de una de las 100 divisiones del tambor, y sea n el número de divisiones correspondientes al desarrollo u; tendremos: $u = n d$ y el área medida (ecuación 3) será

$$S = n d r.$$

Si la figura está á la escala de 1 : 1000, el área correspondiente en el terreno es: $1000^2\, n d r$ y el constructor puede hacer de modo que $1000^2\, d r$ sea igual á 100^{m2} y entonces:

$$S = 100^{m2} \times n;$$

es decir, que bastará multiplicar el número de divisiones por el coeficiente propio del instrumento que hemos supuesto de 100^{m2}.

Si la escala es diversa, por ejemplo de 1 : 2000, el área natural será:

$$2000^2\, n d r = \frac{2000^2}{1000^2} \,.\, 1000^2\, n d r = 4 . n . 100^{m2} = 400^{m2}\, n,$$

Si la escala es de 1 : 3000,

$$S = 900^{m2}\, n, \text{ etc.}$$

Puede un mismo instrumento dar *directamente* las áreas correspondientes á figuras á escalas diferentes sin tener que hacer la multiplicación como acabamos de explicar; para ello se hace variable con cada escala la longitud r del antebrazo, estableciendo igualdades como las siguientes:

$$100^{m2} = 1000^2\, dr, \qquad 100^{m2} = 2000^2\, dr, \ldots\ldots\ldots(5)$$

Los valores resultantes para r se señalan sobre una escala de milímetros grabada en el antebrazo, el cual está formado por una regla que se separa del resto del instrumento aflojando un tornillo de presión (visible en parte en la figura 275, cerca de g); los movimientos pequeños para dar á la regla la longitud r conveniente al caso, se producen con el tornillo nucrométrico f, habiendo previamente apretado el de presión. Para no hacer el cálculo de r, la regla lleva grabadas rayas que corresponden á las escalas más usuales, que se hacen coincidir con un índice grabado en la caja donde resbala la regla.

Cuando se quiere mayor precisión conviene ocurrir al planímetro de la figura 279, que es una modificación hecha por

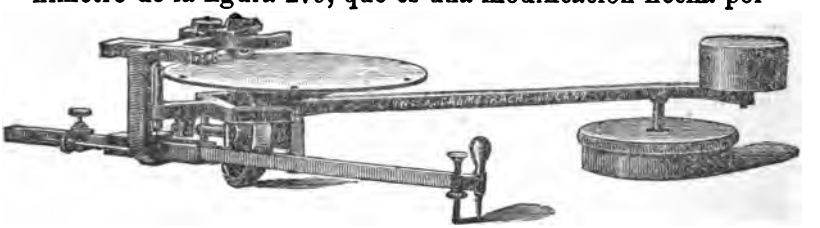


Fig. 279.

el mismo Amsler al planímetro primitivo. La ruedita camina sobre un disco y se liberta así de las irregularidades del plano. Otra rueda soporta al instrumento para que su peso no cargue sobre la graduada.

Hay muchas otras clases de planímetros como el de esfera de Hohmann, el planímetro-pantógrafo. (1)

(1) Véase Rivista di Topografia e Catasto. Vol. II, 4 y V, 1.

Para verificar un planímetro se emplea una regla de prueba (fig. 280) fijada sobre una mesa de dibujo por medio de una punta que sirve de centro. Se coloca el punzón del planímetro en una división dada de la regla, y haciéndole girar una circunferencia completa sin que el punzón se desaloje del punto en que se dispuso (fig. 281), se verifica si el área dada por el planímetro es igual á la del círculo correspondiente al radio conocido del círculo descrito. Igual resultado se obtiene moviendo el punzón sobre una ranura delgada, grabada en un círculo de metal, que encierra un número conocido de milímetros cuadrados. El punto de partida se marca exactamente en la mesa por la posición del pequeño taladro del extremo derecho de la regla. Cuando se usa el círculo se parte de un punto grabado más profundamente que la ranura.

La verificación debe repetirse varias veces cambiando la posición del polo ó puntos como P' y P'' (fig. 281).

Para obtener en la medida de una superficie los mejores resultados es necesario colocar el polo, como lo muestra la figura 282, de manera que poniendo el punzón enmedio de la figura por medir $J\,J$, el plano vertical $E\,E$ que pasa por el borde del tambor, pase por el polo P ó muy cerca de él. También debe evitarse que la circunferencia fundamental coincida con una parte del perímetro de la figura ó se le acerque mucho. (1)

Precisión de las medidas con planímetro.—Para obtener buenos resultados manejando un planímetro, se necesita adquirir alguna práctica: no es operación tan sencilla como parece á primera vista, la de seguir exactamente un perímetro curvilíneo. Sin embargo de las pequeñas desviaciones que sufre el punzón, se llega á resultados muy concordantes ejecutando varias medidas, lo cual se debe á que las superficies aumentadas se compensan con las disminuídas en una operación efectuada con esmero.

(1) Véase Coradi.—Istruzioni sull'uso e sulla verificazione dei planimetri.

Para conseguir de un planímetro polar los mejores resultados, deben tenerse presentes las siguientes indicaciones:

1ª La mesa de apoyo del plano debe ser horizontal y de superficie bien plana. El dibujo debe estar bien restirado.

2ª El reborde del tambor debe ser perfectamente liso.

3ª Los movimientos de las reglas en su unión y en el polo deben hacerse sin esfuerzo.

4ª El eje del tambor debe girar fácilmente en sus pernos.

5ª El punzón debe ser recto, estar bien asegurado al antebrazo y colocado normalmente al mismo.

6ª Cuando en el contorno de la figura hay lados rectos, para guiar bien el punzón se debe apoyar en una regla paralela al lado, y tan cercana á éste como sea necesario.

7ª Antes de usar el planímetro y aunque se haya colocado el antebrazo en la posición que indica la marca correspondiente á la escala de la figura por medir, debe hacerse la prueba con la regla de acero ó con el disco especial para la rectificación.

Siendo la mínima superficie apreciable la que corresponde á un décimo de la división del tambor, y representando dicho décimo una área constante, se comprende que mientras menor sea la superficie de la figura, mayor será el error proporcional cometido. Por eso en las figuras pequeñas conviene repetir más veces la medida y ser aun más cuidadoso que tratándose de grandes figuras.

Usando un planímetro polar común y del modo ordinario, se han encontrado los errores relativos siguientes:

Para áreas hasta			$10^{cm.2}$;	error $\frac{1}{75}$
,,	,,	,,	20	,, $\frac{1}{148}$
,,	,,	,,	50	,, $\frac{1}{355}$
,,	,,	,,	100	,, $\frac{1}{682}$
,,	,,	,,	200	,, $\frac{1}{1274}$

La unidad del vernier era de 10^{m2}.

Los números anteriores demuestran que el error del planímetro es casi constante en medida absoluta.

Según Bauernfeind, la precisión, midiendo círculos guiando el punzón con la mano, es de $\frac{1}{615}$, y según Amsler "se considera bueno un planímetro cuando el error está en el milésimo del área medida."

Pantógrafos.—Estos instrumentos sirven para copiar dibujos á escala diversa de la del original. Pueden también copiar á igual escala, pero entonces es más fácil el calcar el dibujo primitivo en papel ó tela transparentes.

El pantógrafo consiste en un paralelógramo de madera ó metal $A\,B\,C\,D$ (fig. 283), formado por cuatro reglas articuladas. Dos de estas $A\,B$ y $A\,D$ contiguas, se prolongan hasta E y G, en cuyos puntos se encuentran dos señaladores ó punzones. En la intersección de la línea que une los puntos E y G con el lado $D\,C$ ó con el $C\,B$, se dispone un perno (como en F de nuestra figura) sobre el cual puede girar todo el aparato, abrirse ó cerrarse, por efecto de las articulaciones que unen las astas entre sí en A, B, C y D.

Colocado uno de estos instrumentos sobre una mesa con los ejes de las articulaciones y el del perno perpendiculares al plano de la mesa y con el punto F inmóvil, si se recorre el contorno de una figura con una de las puntas E ó G, la otra describe una figura semejante y la relación constante entre los lados homólogos de las dos, es igual á la relación entre las distancias que las dos puntas E y G tienen respectivamente á F.

En efecto, los dos triángulos $A\,E\,G$ y $D\,F\,G$ son semejantes por construcción, puesto que $A\,B$ y $D\,C$ son lados de un paralelógramo. Esta condición subsiste sea cual fuere la forma ó posición tomada por el paralelógramo, y subsiste aun cambiando el polo F al vértice A y los marcadores á F y E' como en el instrumento representado en la figura 285. En el 284 se adoptó la primera disposición.

Pantógrafo de Kern.—Este instrumento tiene la primitiva

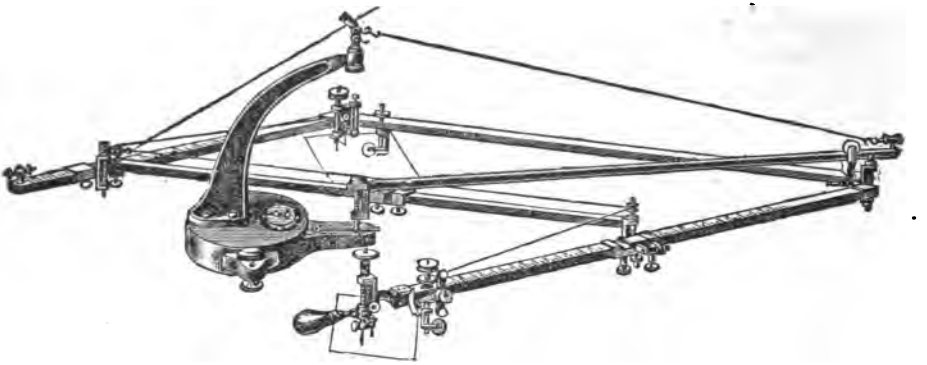


Fig. 285.

forma del pantógrafo, pero con mejoras en los detalles (figura 284). En vez de reglas está formado de tubos metálicos para tener mayor rigidez con menor peso, las articulaciones están formadas por las puntas de dos tornillos para disminuir el rozamiento, y el aparato reposa sobre dos ruedecillas y sobre un pie fijo que lleva el eje de rotación. La presión del lápiz sobre el papel se puede aumentar cargándolo con pequeños pesos. Sobre los dos brazos que llevan el lápiz y el eje de rotación están grabadas rayas que indican la posición de los brazos para tener las reducciones á $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, ...

Pantógrafo suspendido.—El examen de la fig. 285 es bastante para hacer comprender la disposición de las partes y el modo de manejar este instrumento. El polo es el ángulo izquierdo del paralelógramo y va sostenido por una regla afirmada en un pie pesado que en su parte superior lleva dos alambres que van á atarse á dos vértices del paralelógramo para suspenderlo, y que no cargue todo el peso en carretillas como se verifica en el modelo de Kern. Uno de los lados del paralelógramo puede deslizarse paralelamente á sí mismo aflojando previamente dos tornillos de presión que afirman sus extremos en otros dos lados. La pieza que lleva el lápiz que copia la figura va en este brazo móvil y puede deslizarse en él para dar á uno y otro la posición correspondiente á la pro-

porción en que quiera reducirse la figura. Los brazos en que desliza el móvil llevan así como éste marcas apropiadas á las escalas usuales, y además una división en milímetros para cualesquiera otras proporciones.

FIN DEL TOMO PRIMERO.

TABLA I. (Pág. 33).

Logaritmos del factor F.

Lat. φ.	Log. F.	Dif. 1'.	Lat. φ.	Log. F.	Dif. 1'.
15°—00'.....	7.9404	5.0	24°—00'.....	8.1605.....	3.4
30'.....	7.9554	4.8	30'.....	8.1706.....	3.3
16°—00'.....	7.9699	4.7	25°—00'.....	8.1806.....	3.3
30'.....	7.9839	4.6	30'.....	8.1904.....	3.2
17°—00'.....	7.9977	4.4	26°—00'.....	8.2000.....	3.2
30'.....	8.0110	4.3	30'.....	8.2096.....	3.1
18°—00'.....	8.0240	4.2	27°—00'.....	8.2190.....	3.1
30'.....	8.0368	4.1	30'.....	8.2282.....	3.0
19°—00'.....	8.0492	4.0	28°—00'.....	8.2374.....	3.0
30'.....	8.0613	4.0	30'.....	8.2465.....	3.0
20°—00'.....	8.0732	3.9	29°—00'.....	8.2554.....	2.9
30'.....	8.0849	3.8	30'.....	8.2643.....	2.9
21°—00'.....	8 0963	3.7	30°—00'.....	8.2730.....	2.9
30'.....	8.1075	3.7	30'.....	8.2817.....	2.9
22°—00'.....	8.1185	3.6	31°—00'.....	8.2903.....	2.8
30'.....	8.1293	3.6	30'.....	8.2988.....	2.8
23°—00'.....	8.1399	3.5	32°—00'.....	8.3073.....	2.8
30'.....	8.1503	3.4	30'.....	8.3156.....	2.8
24°—00'.....	8.1605		33°—00'.....	8.3239.....	

TABLA II.

DECLINACIONES.

Esta tabla, citada en la página 195, queda suprimida del presente volumen, y la daremos en el segundo para tener nuevos datos que la mejoren.

TABLA III. (Pág. 221).

Alturas aproximadas.—Argumento Barómetro.

TABLA DE RADAU.

Barómetro.	Altura.	Diferencia.	Barómetro.	Altura.	Diferencia.
H	Z	D	H	Z	D
mm	m	m	mm	m	m
381	5517.4	21.0	415	4833.8	19.2
382	5496.4	20.9	416	4814.6	19.2
383	5475.5	20.9	417	4795.4	19.1
384	5454.6	20.8	418	4776.3	19.1
			419	4757.2	19.1
385	5433.8	20.8			
386	5413.0	20.7	420	4738.1	19.0
387	5392.3	20.6	421	4719.1	19.0
388	5371.7	20.6	422	4700.1	18.9
389	5351.1	20.5	423	4681.2	18.9
390	5330.6		424	4662.3	18.8
			425	4643.5	
390	5330.6	20.5			
391	5310.1	20.4	425	4643.5	18.8
392	5289.7	20.4	426	4624.7	18.7
393	5269.3	20.3	427	4606.0	18.7
394	5249.0	20.3	428	4587.3	18.7
			429	4568.6	18.6
395	5228.7	20.2			
396	5208.5	20.1	430	4550.0	18.6
397	5188.4	20.1	431	4531.4	18.5
398	5168.3	20.1	432	4512.9	18.5
399	5148.2	20.0	433	4494.4	18.4
			434	4476.0	18.4
400	5128.2	20.0			
401	5108.2	19.9	435	4457.6	18.4
402	5088.3	19.9	436	4439.2	18.3
403	5068.4	19.8	437	4420.9	18.3
404	5048.6	19.8	438	4402.6	18.2
			439	4384.4	18.2
405	5028.8	19.7			
406	5009.1	19.7	440	4366.2	18.2
407	4989.4	19.6	441	4348.0	18.1
408	4969.8	19.6	442	4329.9	18.1
409	4950.2	19.5	443	4311.8	18.0
			444	4293.8	18.0
410	4930.7	19.5			
411	4911.2	19.4	445	4275.8	18.0
412	4891.8	19.4	446	4257.8	17.9
413	4872.4	19.3	447	4239.9	17.8
414	4853.1	19.3	448	4222.1	17.8

Barómetro. H	Altura. Z	Diferencia. D
mm	m	m
449	4204.3	17.8
450	4186.5	17.8
451	4168.7	17.7
452	4151.0	17.6
453	4133.4	17.6
454	4115.8	17.6
455	4098.2	17.6
456	4080.6	17.5
457	4063.1	17.5
458	4045.6	17.4
459	4028.2	17.4
460	4010.8	
460	4010.8	17.4
461	3993.4	17.3
462	3976.1	17.3
463	3958.8	17.2
464	3941.6	17.2
465	3924.4	17.2
466	3907.2	17.1
467	3890.1	17.1
468	3873.0	17.1
469	3855.9	17.0
470	3838.9	17.0
471	3821.9	16.9
472	3805.0	16.9
473	3788.1	16.9
474	3771.2	16.8
475	3754.4	16.8
476	3737.6	16.8
477	3720.8	16.7
478	3704.1	16.7
479	3687.4	16.7
480	3670.7	16.6
481	3654.1	16.6
482	3637.5	16.6
483	3620.9	16.5
484	3604.4	16.5
485	3587.9	16.5
486	3571.4	16.4
487	3555.0	16.4
488	3538.6	16.3
489	3522.3	16.4
490	3505.9	16.3
491	3489.6	16.3

Barómetro. H	Altura. Z	Diferencia. D
mm	m	m
492	3473.3	16.2
493	3457.1	16.2
494	3440.9	16.2
495	3424.7	
495	3424.7	16.1
496	3408.6	16.1
497	3392.5	16.1
498	3376.4	16.0
499	3360.4	16.0
500	3344.4	16.0
501	3328.4	15.9
502	3312.5	15.9
503	3296.6	15.9
504	3280.7	15.8
505	3264.9	15.8
506	3249.1	15.8
507	3233.3	15.8
508	3217.5	15.7
509	3201.8	15.7
510	3186.1	15.6
511	3170.5	15.6
512	3154.9	15.6
513	3139.3	15.6
514	3123.7	15.5
515	3108.2	15.5
516	3092.7	15.5
517	3077.2	15.4
518	3061.8	15.4
519	3046.4	15.4
520	3031.0	15.4
521	3015.6	15.3
522	3000.3	15.3
523	2985.0	15.3
524	2969.7	15.2
525	2954.5	15.2
526	2939.3	15.2
527	2924.1	15.1
528	2909.0	15.1
529	2893.9	15.1
530	2878.8	
530	2878.8	15.1
531	2863.7	15.0
532	2848.7	15.0
533	2833.7	15.0
534	2818.7	15.0

Barómetro. H mm	Altura. Z m	Diferencia. D m
535	2803.7	14.9
536	2788.8	14.9
537	2773.9	14.9
538	2759.0	14.8
539	2744.2	14.8
540	2729.4	14.8
541	2714.6	14.7
542	2699.9	14.8
543	2685.1	14.7
544	2670.4	14.6
545	2655.8	14.7
546	2641.1	14.6
547	2626.5	14.6
548	2611.9	14.6
549	2597.3	14.5
550	2582.8	14.5
551	2568.3	14.5
552	2553.8	14.5
553	2539.3	14.4
554	2524.9	14.4
555	2510.5	14.4
556	2496.1	14.4
557	2481.7	14.3
558	2467.4	14.3
559	2453.1	14.3
560	2430.8	14.2
561	2424.6	14.2
562	2410.4	14.2
563	2396.2	14.2
564	2382.0	14.2
565	2367.8	
565	2367.8	14.1
566	2353.7	14.1
567	2339.6	14.1
568	2325.5	14.0
569	2311.5	14.1
570	2297.4	14.0
571	2203.4	14.0
572	2269.4	13.9
573	2255.5	13.9
574	2241.6	13.9
575	2227.7	13.9
576	2213.8	13.9
577	2199.9	13.8
578	2186.1	13.8
579	2172.3	13.8
580	2158.9	13.8
581	2144.3	13.7
582	2131.0	13.7
583	2117.3	13.7
584	2103.6	13.7
585	2089.9	13.6
586	2076.3	13.6
587	2062.7	13.6
588	2049.1	13.6
589	2035.5	13.6
590	2021.9	13.5
591	2008.4	13.5
592	1994.9	13.5
593	1981.4	13.4
594	1968.0	13.4
595	1954.6	13.4
596	1941.2	13.4
597	1927.8	13.4
598	1914.4	13.4
599	1901.0	13.3
600	1887.7	
600	1887.7	13.3
601	1874.4	13.3
602	1861.1	13.3
603	1847.8	13.2
604	1834.6	13.2
605	1821.4	13.2
606	1808.2	13.2
607	1795.0	13.1
608	1781.9	13.1
609	1768.8	13.1
610	1755.7	13.1
611	1742.6	13.1
612	1729.5	13.0
613	1716.5	13.0
614	1703.5	13.0
615	1690.5	13.0
616	1677.5	13.0
617	1664.5	12.9
618	1651.6	12.9
619	1638.7	12.9
620	1625.8	12.9
621	1612.9	12.9

Barómetro. H mm	Altura. Z m	Diferencia. D m
622	1600.0	12.8
623	1587.2	12.8
624	1574.4	12.8
625	1561.6	12.8
626	1548.8	12.7
627	1536.1	12.7
628	1523.4	12.7
629	1510.7	12.7
630	1498.0	12.7
631	1485.3	12.6
632	1472.7	12.7
633	1460.0	12.6
634	1447.4	12.6
635	1434.8	
635	1434.8	12.5
636	1422.3	12.6
637	1409.7	12.5
638	1397.2	12.5
639	1384.7	12.5
640	1372.2	12.5
641	1359.7	12.4
642	1347.3	12.5
643	1334.8	12.4
644	1322.4	12.4
645	1310.0	12.3
646	1297.7	12.4
647	1285.3	12.3
648	1273.0	12.3
649	1260.7	12.3
650	1248.4	12.3
651	1236.1	12.3
652	1223.8	12.2
653	1211.6	12.2
654	1199.4	12.2
655	1187.2	12.2
656	1175.0	12.2
657	1162.8	12.1
658	1150.7	12.2
659	1138.5	12.1
660	1126.4	12.1
661	1114.3	12.1
662	1102.2	12.0
663	1090.2	12.0
664	1078.2	12.0
665	1066.2	12.0
666	1054.2	12.0
667	1042.2	12.0
668	1030.2	11.9
669	1018.3	12.0
670	1006.3	12.0
670	1006.3	11.9
671	994.4	11.9
672	982.5	11.8
673	970.7	11.9
674	958.8	11.8
675	947.0	11.9
676	935.1	11.8
677	923.3	11.7
678	911.6	11.8
679	899.8	11.8
680	888.0	11.7
681	876.3	11.7
682	864.6	11.7
683	852.9	11.7
684	841.2	11.7
685	829.5	11.6
686	817.9	11.6
687	806.3	11.7
688	794.6	11.6
689	783.0	11.5
690	771.5	11.6
691	759.9	11.6
692	748.3	11.5
693	736.8	11.5
694	725.3	11.5
695	713.8	11.5
696	702.3	11.4
697	690.9	11.5
698	679.4	11.4
699	668.0	11.4
700	656.6	11.4
701	645.2	11.4
702	633.8	11.4
703	622.4	11.3
704	611.1	11.4
705	599	
705	599.7	11.3
706	588.4	11.3
707	577.1	11.3

Barómetro. H	Altura. Z	Diferencia. D
mm	m	m
708	565.8	11.2
709	554.6	11.3
710	543.3	11.2
711	532.1	11.3
712	520.8	11.2
713	509.6	11.2
714	498.4	11.1
715	487.3	11.2
716	476.1	11.1
717	465.0	11.2
718	453.8	11.1
719	442.7	11.1
720	431.6	11.0
721	420.6	11.1
722	409.5	11.1
723	398.4	11.0
724	387.4	11.0
725	376.4	11.0
726	365.4	11.0
727	354.4	11.0
728	343.4	10.9
729	332.5	11.0
730	321.5	10.9
731	310.6	10.9
732	299.7	10.9
733	288.8	10.9
734	277.9	10.9
735	267.0	10.8
736	256.2	10.9

Barómetro. H	Altura. Z	Diferencia. D
mm	m	m
737	245.3	10.8
738	234.5	10.8
739	223.7	10.8
740	212.9	
740	212.9	10.8
741	202.1	10.8
742	191.3	10.7
743	180.6	10.8
744	169.8	10.7
745	159.1	10.7
746	148.4	10.7
747	137.7	10.7
748	127.0	10.6
749	116.4	10.7
750	105.7	10.6
751	95.1	10.6
752	84.5	10.6
753	73.9	10.6
754	65.3	10.6
755	52.7	10.6
756	42.1	10.5
757	31.6	10.6
758	21.0	10.5
759	10.5	10.5
760	0.0	10.5
761	—10.5	10.5
762	—21.0	10.5
763	—31.5	10.4
764	—41.9	10.5
765	—52.4	

TABLA IV. (Pág. 222).

Corrección relativa á la latitud.

Latitud.	Corrección.
De 0° á 9°	+ 1.3
10 ,, 14	+ 1.2
15 ,, 18	+ 1.1
19 ,, 22	+ 1.0
23 ,, 25	+ 0.9
De 26° á 27°	+ 0.8
28 ,, 30	+ 0.7
31 ,, 32	+ 0.6
33 ,, 35	+ 0.5
36 ,, 37	+ 0.4

Latitud.	Corrección.	Latitud.	Corrección.
De 38° á 39°	+ 0.3	De 55° á 57°	— 0.5
40 ,, 41	+ 0.2	58 ,, 59	— 0.6
42 ,, 43	+ 0.1	60 ,, 62	— 0.7
44 ,, 46	0.0	63 ,, 64	— 0.8
44 ,, 46	0.0	65 ,, 67	— 0.9
47 ,, 48	— 0.1	68 ,, 71	— 1.0
49 ,, 50	— 0.2	72 ,, 75	— 1.1
51 ,, 52	— 0.3	76 ,, 80	— 1.2
53 ,, 54	— 0.4	81 ,, 90	— 1.3

TABLA V. (Pág. 242).

Conversión de temperaturas de ebullición en presiones barométricas.

ESCALA CENTESIMAL.			ESCALA DE FARENHEIT.		
Temperatura.	Presión.	Dif.	Temperatura.	Presión.	Dif.
85°0	0m4330	86	188°	0m4622	101
85 5	0 4416	87	189	0 4723	103
86 0	0 4503	89	190	0 4825	105
86 5	0 4592	90	191	0 4930	106
87 0	0 4682	91	192	0 5036	108
87 5	0 4773	93	193	0 5144	110
88 0	0 4866	95	194	0 5254	113
88 5	0 4961	96	195	0 5367	114
89 0	0 5057	98	196	0 5481	116
89 5	0 5155	99	197	0 5597	118
90 0	0 5254	101	198	0 5715	120
90 5	0 5355	102	199	0 5835	123
91 0	0 5457	104	200	0 5958	124
91 5	0 5561	106	201	0 6082	127
92 0	0 5667	108	202	0 6209	129
92 5	0 5775	109	203	0 6338	131
93 0	0 5884	111	204	0 6469	133
93 5	0 5995	113	205	0 6602	136
94 0	0 6108	114	206	0 6738	138
94 5	0 6222	116	207	0 6876	140
95 0	0 6338	118	208	0 7016	142
95 5	0 6456	120	209	0 7158	145
96 0	0 6576	122	210	0 7303	147
96 5	0 6698	123	211	0 7450	150
97 0	0 6821	125	212	0 7600	152
97 5	0 6946	127	213	0 7752	154
98 0	0 7073	129	214	0 7906	
98 5	0 7202	130			
99 0	0 7332	133			
99 5	0 7465	135			
100 0	0 7600	138			
100 5	0 7738	140			
101 0	0 7878				

TABLA VI.

Conversión de grados centesimales en grados sexagesimales.

Grados centesimales.	Grados y minutos sexagesimales.	Minutos de grados centesimales.	Minutos y segundos de grado sexagesimal.	Segundos de grados centesimales.	Segundos de grado sexagesimal.
1.....	0°54′.....	0.01′.....	0′32″4.....	0.0001″....	0″324
2.....	1 48	0.02	1 04 8.....	0.0002	0 648
3.....	2 42	0.03	1 37 2.....	0.0003	0 972
4.....	3 36	0.04	2 09 6.....	0.0004	1 296
5.....	4 30	0.05	2 42 0.....	0.0005	1 620
6.....	5 24	0.06	3 14 4.....	0.0006	1 944
7.....	6 18	0.07	3 46 8.....	0.0007	2 268
8.....	7 12	0.08	4 19 2.....	0.0008	2 592
9.....	8 6	0.09	4 51 6.....	0.0009	2 916
10.....	9 0	0.10	5 24 0.....	0.0010	3 240
11.....	9 54	0.11	5 56 4.....	0.0011	3 564
12.....	10 48	0.12	6 28 8.....	0.0012	3 888
13.....	11 42	0.13	7 01 2.....	0.0013	4 212
14.....	12 36	0.14	7 33 6.....	0.0014	4 536
15.....	13 30	0.15	8 06 0.....	0.0015	4 860
16.....	14 24	0.16	8 38 4.....	0.0016	5 184
17.....	15 18	0.17	9 10 8.....	0.0017	5 508
18.....	16 12	0.18	9 43 2.....	0.0018	5 832
19.....	17 6	0.19	10 15 6.....	0.0019	6 156
20.....	18 0	0.20	10 48 0.....	0.0020	6 480
21.....	18 54	0.21	11 20 4.....	0.0021	6 804
22.....	19 48	0.22	11 52 8.....	0.0022	7 128
23.....	20 42	0.23	12 25 2.....	0.0023	7 452
24.....	21 36	0.24	12 57 6.....	0.0024	7 776
25.....	22 30	0.25	13 30 0.....	0.0025	8 100
26.....	23 24	0.26	14 02 4.....	0.0026	8 424
27.....	24 18	0.27	14 34 8.....	0.0027	8 748
28.....	25 12	0.28	15 07 2.....	0.0028	9 072
29.....	26 6	0.29	15 39 6.....	0.0029	9 396
30.....	27 0	0.30	16 12 0.....	0.0030	9 720
31.....	27 54	0.31	16 44 4.....	0.0031	10 044
32.....	28 48	0.32	17 16 8.....	0.0032	10 368
33.....	29 42	0.33	17 49 2.....	0.0033	10 692
34.....	30 36	0.34	18 21 6	0.0034	11 016
35.....	31 30	0.35	18 54 0.....	0.0035	11 340
36.....	32 24	0.36	19 26 4.....	0.0036	11 664
37.....	33 18	0.37	19 58 8.....	0.0037	11 988
38.....	34 12	0.38	20 31 2.....	0.0038	12 312
39.....	35 6	0.39	21 03 6.....	0.0039	12 636
40.....	36 0	0.40	21 36 0.....	0.0040	12 960
41.....	36 54	0.41	22 08 4.....	0.0041	13 284
42.....	37 48	0.42	22 40 8.....	0.0042	13 608
43.....	38 42	0.43	23 13 2.....	0.0043	13 932
44.....	39 36	0.44	23 45 6.....	0.0044	14 256
45.....	40 30	0.45	24 18 0.....	0.0045	14 580
46.....	41 24	0.46	24 50 4.....	0.0046	14 904

Grados centesimales.	Grados y minutos sexagesimales.	Minutos de grados centesimales.	Minutos y segundos de grado sexagesimal.	Segundos de grados centesimales.	Segundos de grado sexagesimal.
47.....	42°18′.....	0.47′.....	25′22″8.....	0.0047″....	15″228
48.....	43 12	0.48	25 55 2.....	0.0048	15 552
49.....	44 6	0.49	26 27 6.....	0.0049	15 876
50.....	45 0	0.50	27 00 0.....	0.0050	16 200
51.....	45 54	0.51	27 32 4.....	0.0051	16 524
52.....	46 48	0.52	28 04 8.....	0.0052	16 848
53.....	47 42	0.53	28 37 2.....	0.0053	17 172
54.....	48 36	0.54	29 09 6.....	0.0054	17 496
55.....	49 30	0.55	29 42 0.....	0.0055	17 820
56.....	50 24	0.56	30 14 4.....	0.0056	18 144
57.....	51 18	0.57	30 46 8.....	0.0057	18 468
58.....	52 12	0.58	31 19 2.....	0.0058	18 792
59.....	53 6	0.59	31 51 6.....	0.0059	19 116
60.....	54 0	0.60	32 24 0.....	0.0060	19 440
61.....	54 54	0.61	32 56 4.....	0.0061	19 764
62.....	55 48	0.62	33 28 8.....	0.0062	20 088
63.....	56 42	0.63	34 01 2.....	0.0063	20 412
64.....	57 36	0.64	34 33 6.....	0.0064	20 736
65.....	58 30	0.65	35 06 0.....	0.0065	21 060
66.....	59 24	0.66	35 38 4.....	0.0066	21 384
67.....	60 18	0.67	36 10 8.....	0.0067	21 708
68.....	61 12	0.68	36 43 2.....	0.0068	22 032
69.....	62 6	0.69	37 15 6.....	0.0069	22 356
70.....	63 0	0.70	37 48 0.....	0.0070	22 680
71.....	63 54	0.71	38 20 4.....	0.0071	23 004
72.....	64 48	0.72	38 52 8.....	0.0072	23 328
73.....	65 42	0.73	39 25 2.....	0.0073	23 652
74.....	66 36	0.74	39 57 6.....	0.0074	23 976
75.....	67 30	0.75	40 30 0.....	0.0075	24 300
76.....	68 24	0.76	41 02 4.....	0.0076	24 624
77.....	69 18	0.77	41 34 8.....	0.0077	24 948
78.....	70 12	0.78	42 07 2.....	0.0078	25 272
79.....	71 6	0.79	42 39 6.....	0.0079	25 596
80.....	72 0	0.80	43 12 0.....	0.0080	25 920
81.....	72 54	0.81	43 44 4.....	0.0081	26 244
82.....	73 48	0.82	44 16 8.....	0.0082	26 568
83.....	74 42	0.83	44 49 2.....	0.0083	26 892
84.....	75 36	0.84	45 21 6.....	0.0084	27 216
85.....	76 30	0.85	45 54 0.....	0.0085	27 540
86.....	77 24	0.86	46 26 4.....	0.0086	27 864
87.....	78 18	0.87	46 58 8.....	0.0087	28 188
88.....	79 12	0.88	47 31 2.....	0.0088	28 512
89.....	80 6	0.89	48 03 6.....	0.0089	28 836
90.....	81 0	0.90	48 36 0.....	0.0090	29 160
91.....	81 54	0.91	49 08 4.....	0.0091	29 484
92.....	82 48	0.92	49 40 8.....	0.0092	29 808
93.....	83 42	0.93	50 13 2.....	0.0093	30 132
94.....	84 36	0.94	50 45 6.....	0.0094	30 456
95.....	85 30	0.95	51 18 0.....	0.0095	30 780
96.....	86 24	0.96	51 50 4.....	0.0096	31 104
97.....	87 18	0.97	52 22 8.....	0.0097	31 428
98.....	88 12	0.98	52 55 2.....	0.0098	31 752
99.....	89 6	0.99	53 27 6.....	0.0099	32 076
100.....	90 0	1.00	54 00 0.....	0.0100	32 400

Conversión de grados sexagesimales en grados centesimales.

Grados sexagesimales.	Grados centesimales.	Minutos.	Grados centesimales.	Segundos.	Grados centesimales.
1°	1°1111″1	1′	0°0185″2	1″	0°0003″1
2	2 2222 2	2	0 0370 4	2	0 0006 2
3	3 3333 3	3	0 0555 6	3	0 0009 3
4	4 4444 4	4	0 0740 7	4	0 0012 3
5	5 5555 6	5	0 0925 9	5	0 0015 4
6	6 6666 7	6	0 1111 1	6	0 0018 5
7	7 7777 8	7	0 1296 3	7	0 0021 6
8	8 8888 9	8	0 1481 5	8	0 0024 7
9	10 0000 0	9	0 1666 7	9	0 0027 8
10	11 1111 1	10	0 1851 8	10	0 0030 9
11	12 2222 2	11	0 2037 0	11	0 0033 9
12	13 3333 3	12	0 2222 2	12	0 0037 0
13	14 4444 4	13	0 2407 4	13	0 0040 1
14	15 5555 6	14	0 2592 6	14	0 0043 2
15	16 6666 7	15	0 2777 8	15	0 0046 3
16	17 7777 8	16	0 2963 0	16	0 0049 4
17	18 8888 9	17	0 3148 2	17	0 0052 5
18	20 0000 0	18	0 3333 3	18	0 0055 6
19	21 1111 1	19	0 3518 5	19	0 0058 6
20	22 2222 2	20	0 3703 7	20	0 0061 7
21	23 3333 3	21	0 3888 9	21	0 0064 8
22	24 4444 4	22	0 4074 1	22	0 0067 9
23	25 5555 6	23	0 4259 3	23	0 0071 0
24	26 6666 7	24	0 4444 4	24	0 0074 1
25	26 7777 8	25	0 4629 6	25	0 0077 2
26	28 8888 9	26	0 4814 8	26	0 0080 2
27	30 0000 0	27	0 5000 0	27	0 0083 3
28	31 1111 1	28	0 5185 2	28	0 0086 4
29	32 2222 2	29	0 5370 4	29	0 0089 5
30	33 3333 3	30	0 5555 6	30	0 0092 6
31	34 4444 4	31	0 5740 7	31	0 0095 7
32	35 5555 6				
33	36 6666 7				
34	37 7777 8				
35	38 8888 9				
36	40 0000 0				
37	41 1111 1				
38	42 2222 2				
39	43 3333 3				
40	44 4444 4				
41	45 5555 6				
42	46 6666 7				
43	47 7777 8				
44	48 8888 9				
45	50 0000 0				
46	51 1111 1				
47	52 2222 2				

Grados sexagesimales.	Grados centesimales.	Minutos.	Grados centesimales.	Segundos.	Grados centesimales.
48°	53°3333″3	32	0°5925″9	32″	0°0098″8
49	54 4444 4	33	0 6111 1	33	0 0101 8
50	55 5555 6	34	0 6296 3	34	0 0104 9
51	56 6666 7	35	0 6481 5	35	0 0108 0
52	57 7777 8	36	0 6666 1	36	0 0111 1
53	58 8888 9	37	0 6851 9	37	0 0114 2
54	60 0000 0	38	0 7037 0	38	0 0117 3
55	61 1111 1	39	0 7222 2	39	0 0120 4
56	62 2222 2	40	0 7407 4	40	0 0123 4
57	63 3333 3	41	0 7592 6	41	0 0126 5
58	64 4444 4	42	0 7777 8	42	0 0129 6
59	65 5555 6	43	0 7963 0	43	0 0132 7
60	66 6666 7	44	0 8148 2	44	0 0135 8
61	67 7777 8	45	0 8333 3	45	0 0138 9
62	68 8888 9	46	0 8518 5	46	0 0142 0
63	70 0000 0	47	0 8703 7	47	0 0145 1
64	71 1111 1	48	0 8888 9	48	0 0148 1
65	72 2222 2	49	0 9074 1	49	0 0151 2
66	73 3333 3	50	0 9259 3	50	0 0154 3
67	74 4444 4	51	0 9444 4	51	0 0157 4
68	75 5555 6	52	0 9629 6	52	0 0160 5
69	76 6666 7	53	0 9814 8	53	0 0163 6
70	77 7777 8	54	1 0000 0	54	0 0166 7
71	78 8888 9	55	1 0185 2	55	0 0169 7
72	80 0000 0	56	1 0370 4	56	0 0172 8
73	81 1111 1	57	1 0555 6	57	0 0175 9
74	82 2222 2	58	1 0740 7	58	0 0179 0
75	83 3333 3	59	1 0925 9	59	0 0182 1
76	84 4444 4	60	1 1111 1	60	0 0185 2
77	85 5555 6				
78	86 6666 7				
79	87 7777 8				
80	88 8888 9				
81	90 0000 0				
82	91 1111 1				
83	92 2222 2				
84	93 3333 3				
85	94 4444 4				
86	95 5555 6				
87	96 6666 7				
88	97 7777 8				
89	98 8888 9				
90	100 0000 0				

FE DE ERRATAS.

Pág.ª	Línea.	DICE.	LÉASE.
XVIII	9	con rapidez también, son	con rapidez, también son
XIX	22	catrastral.....	catastral
XIX	29	incontestablesmente.....	incontestablemente
XX	5	no es el suyo:.....	no es el suyo,
32	24	fija, y por recta la meridiana...	y por recta fija la meridiana
38	4	disposiciones de la figura 3.....	disposiciones á la izquierda de la figura 3
76	14	(fig. 26).....	(fig. 25)
114	5	geneaal.....	general
116	28	AE′.....	AE
139	20	otra.....	otro
158	9	*abe*.....	*dbe*

INDICE DEL TOMO PRIMERO.

Páginas.

INTRODUCCIÓN III

PRIMERA PARTE.

Capítulo I.—*De la medición* 25
Capítulo II.—*De los varios sistemas empleados para determinar la posición de un punto y del límite de las operaciones topográficas* 28
Capítulo III.—*De los diversos medios empleados para determinar un punto del terreno* 35
Capítulo IV.—*De la determinación de las direcciones.—Principios de óptica.* 39
Principios de óptica geométrica 41
Reflexión.—Espejos planos 46
Refracción.—Prismas 51
Acromatismo 56
Refracción en una superficie esférica 59
Lentes 61
El aumento 77
Aberraciones de las lentes 81
Lentes acromáticas 86
Del ojo humano 89
Condiciones físicas del ojo 90
Visión distinta 94
Claridad 98
Agudeza visual 100
Visuales 103
Observaciones á la simple vista.—Instrumentos de pínulas 105
Observaciones con reflectores 108
Observaciones con telescopio 118
Campo 122
Claridad en los anteojos 123

Páginas.

Líneas de colimación 128
Del objetivo 136
De la reticula 137
Del ocular 141
Conclusión.—Potencia de separación de los anteojos 149
Capítulo V.—*Medios para determinar planos en el espacio* 153

SEGUNDA PARTE.

DEL ESTABLECIMIENTO DE LOS EJES COORDENADOS.

Capítulo VI.—*Medios para determinar la vertical* 155
Nivel de burbuja 156
Niveles esféricos 162
Rectificación de un nivel 164
Capítulo VII.—*De la orientación de los planos coordenados verticales.*—Meridianos astronómico y magnético 168
Meridiana astronómica 168
Solar compass 169
Accesorio solar 175
Correcciones del accesorio solar 186
Meridiana magnética 189
Variación geográfica 191
Variación secular 195
Variación diurna 199
Perturbaciones accidentales 199
Perturbaciones locales 200
Declinatorio magnético 203
Utilización del magnetismo de la aguja.—Brújula 205
Capítulo VIII.—*De la situación del origen sobre la vertical. Altura sobre el nivel del mar.*—Barómetros 210
Fundamento del barómetro 211
Fórmulas barométricas 213
Barómetro de mercurio 224
Depresión capilar 226
Dilatación de la escala 228
Barómetro aneroide.—Descripción 228
Diversas clases de aneroides ú olostéricos.—Graduación y compensación 231
Comparación de los aneroides 234
Precisión alcanzada con el aneroide 238
Termobarómetro ó hipsómetro 240

TERCERA PARTE.

MEDIDA DE LÍNEAS Y MEDIDA DE ÁNGULOS.

Páginas.

Capítulo IX.—*Medida directa de las líneas.—Bases* 246
Errores en las medidas de las líneas... 249
Pedómetro 251
Cordel de agrimensor. 254
Cadena de agrimensor..... 255
Resorte de acero..... 256
Cañas ó bastones..... 257
Examen de las causas de error..... 258
Bases. 263
Comparación de las reglas..... 268
Contacto ó separación de las reglas..... 272
Procedimiento Struve..... 273
Bases cuyo error es inferior á 1 : 100.000..... 277
Capítulo X.—*Medida indirecta de las líneas.—Telémetros.— Estadias*... 281
Telémetros 283
Estadias en general..... 289
Teoría de la estadia de hilos fijos..... 291
Principio del analatismo..... 295
Anteojos analáticos..... 300
Medida con la estadia de las distancias no horizontales..... 303
Estadales para diastimómetros..... 304
Relación de perpendicularidad entre el estadal y la línea de colimación. —Eutímetro 309
Diversas clases de anteojos analáticos..... 311
Precisión de las medidas con estadia de hilos fijos. Potencia de los anteojos considerados como órganos telemétricos.. 316
Equivocaciones 328
Teoría de la estadia de hilo móvil ó estadia micrométrica..... 329
Gradienter ó micrómetro de pendientes..... 331
Medida con el gradienter de las distancias inclinadas..... 335
Micrómetro de corredera..... 338
Precisión de las medidas con estadias de hilo móvil..... 342
Estadias de doble imagen..... 344
Anteojo micrométrico de Lugeol..... 345
Micrómetro de Pochou.. 346
Estadia prismática de Richards..... 350
Alidada auto-reductriz... 350
Capítulo XI.—*Medida de los ángulos.*—Goniómetros. 353
Sistemas de graduación.. 354

Páginas.

El vernier ó nonius..... 357
Precisión dada por el vernier en relación con las dimensiones del limbo y el aumento de la lente..... 360
Diferentes clases de verniers. Equivocaciones en las lecturas..... 362
Microscopios compuestos para la lectura de los limbos graduados..... 364
Microscopios colimadores..... 367
Microscopios de estima ó de hilos fijos. Precisión de las lecturas..... 367
Círculos de los Cleps..... 369
Microscopios micrométricos..... 373
Rectificación del micrómetro..... 376
Precisión de las lecturas con micrómetro de hilo móvil..... 378
Exactitud de las graduaciones..... 379
Error de excentricidad..... 380
Métodos de medición de ángulos..... 382

CUARTA PARTE.

INSTRUMENTOS TOPOGRÁFICOS COMPLETOS.

Capítulo XII.—*Instrumentos topográficos universales.*—Condiciones teóricas y clasificación de los universales..... 383
Errores de los universales..... 386
Verticalidad del eje de rotación..... 387
Perpendicularidad del eje de la alidada respecto del círculo horizontal.. 388
Perpendicularidad del eje de rotación del telescopio respecto del eje vertical de la alidada..... 389
Perpendicularidad de la línea de colimación respecto del eje de rotación del telescopio..... 390
Paralelismo entre el eje del nivel y el de rotación del anteojo. Rectificación del nivel..... 391
Error de índice del círculo vertical..... 391
Perpendicularidad del círculo vertical respecto del eje horizontal..... 392
Posición exacta de la retícula..... 392
Error de excentricidad..... 393
Posición asimétrica de los índices..... 393
Exactitud de las graduaciones..... 394
Graduación de los verniers y paso de los tornillos micrométricos..... 394
Intersección de los ejes y la línea de colimación..... 394
Universales de anteojo excéntrico..... 394
Descripción de las partes componentes de los universales.—Tripies..... 396
Plataformas..... 398
Tornillos nivelantes..... 400
Eje vertical, parte fija, alidada..... 401

Páginas.

Apoyos del telescopio..... 403
Tornillos de presión y de aproximación..... 403
Tornillos de rectificación..... 405
Microscopios lectores..... 406
Plomadas..... 406
Construcción general..... 406
Descripción de algunos modelos universales.—Teodolitos.—Teodolito reiterador con microscopios..... 408
Teodolito repetidor con microscopios..... 409
Teodolito reiterador con microscopios micrométricos..... 410
Teodolito repetidor de verniers..... 412
Teodolito ligero para montañas, minas y reconocimientos..... 413
Taquímetros.—Taquímetro de microscopios micrométricos..... 414
Taquímetros de verniers..... 414
Taquímetro normal..... 416
Taquímetro mediano..... 418
Taquímetro pequeño ó taquímetro Soldati..... 419
Taquímetro Buff y Berger..... 421
Taquímetro Salmoiraghi con microscopios de hilos fijos..... 421
Taquímetros Brosset..... 423
Universales de anteojo excéntrico. Teodolitos. Teodolito excéntrico..... 426
Teodolito minero con anteojo excéntrico..... 426
Los Cleps..... 427
Cleps de modelo grande..... 427
Cleps de modelo mediano..... 433
Cleps de modelo pequeño..... 434
Verificaciones y rectificaciones de los Cleps..... 436
Capítulo XIII.—*Instrumentos derivados de los universales.*—Brújula-plancheta..... 437
Brújula prismática..... 439
Brújula de anteojo central..... 440
Brújula de anteojo excéntrico..... 441
Brújula de pínulas..... 441
Brújula minera de suspensión..... 442
Brújulas unidas á otros instrumentos..... 442
Brújulas declinables..... 443
Plancheta..... 443
Capítulo XIV.—*Goniómetros de reflexión.*—Escuadras. Sextante..... 446
Capítulo XV.—Niveles..... 448
Horizontal verdadera y horizontal aparente..... 450
Varias clases de niveles. Nivel de burbuja, de agua y de pesa..... 450
Niveles de burbuja..... 451

Páginas.

Condiciones que debe satisfacer el nivel de burbuja..... 452
Nivel Porro..... 453
Rectificación de un nivel tipo inglés..... 455
Nivel de anteojo y nivel móviles..... 457
Nivel de anteojo móvil y nivel fijo..... 458
Nivel Y..... 459
Nivel de doble graduación..... 460
Niveles de pendiente..... 461
Niveles sobre una línea..... 462
Nivel de agua..... 462
Nivel de pesa ó de péndulo..... 463
Miras para nivelación..... 464

QUINTA PARTE.

INSTRUMENTOS ACCESORIOS.

Capítulo XVI.—Instrumentos para medir líneas, ángulos ó superficies sobre el papel.—Pantógrafos..... 467
Reglas..... 467
Transportadores ó goniógrafos..... 468
Planímetros..... 468
Planímetro ortogonal..... 469
Prueba del planímetro ortogonal..... 471
Planímetro polar de Amsler..... 471
Precisión de las medidas con planímetro..... 477
Pantógrafos..... 479
Pantógrafo de Kern..... 479
Pantógrafo suspendido..... 480
Tabla I.—Logaritmos del factor F..... 483
Tabla II.—Declinaciones..... 483
Tabla III.—Alturas aproximadas. Argumento barómetro. Tabla de Radau..... 484
Tabla IV.—Corrección relativa á la latitud..... 488
Tabla V.—Corrección de temperaturas de ebullición en presiones barométricas..... 489
Tabla VI.—Conversión de grados centesimales en grados sexagesimales. 490
Conversión de grados sexagesimales en grados centesimales..... 492